

Si vous tournez lentement le bouton dans le sens des aiguilles d'une montre, la probabilité que les tuyaux soient ouverts augmente progressivement, et l'on pourrait s'attendre à ce que la probabilité de trouver un amas infini augmente également lentement de 0 à 1. En réalité, ce changement a lieu abruptement, à cause de la loi du zéro-un, qui indique que la probabilité ne peut pas être comprise entre 0 et 1. Pour le réseau carré, la probabilité passe de 0 à 1 quand le bouton est exactement au milieu (c'est-à-dire quand la pièce n'est pas biaisée). La position critique du bouton est ce qu'on appelle le «seuil de percolation». Quelle que soit la forme du réseau, qu'il s'agisse par exemple du réseau triangulaire ou du réseau cubique (version tridimensionnelle du réseau carré), la question essentielle de la théorie de la percolation reste la même: quelle est la valeur du seuil? Quel doit être le biais de la pièce afin que suffisamment de tuyaux soient ouverts pour garantir un amas ouvert infini?

La réponse dépend de la forme exacte du réseau (infini), et elle n'a rien de trivial. Pour un réseau carré, le seuil est égal à $1/2$ (autrement dit, dès que la probabilité qu'un tuyau soit ouvert est au moins égale à $1/2$, il y a un amas ouvert infini). Même ce résultat, qui porte sur le plus simple des réseaux, a été très difficile à prouver: ce n'est qu'en 1980 que le mathématicien d'origine allemande Harry Kesten y est parvenu. Et malgré des décennies d'efforts, les seuils exacts de percolation ne sont connus que pour quelques réseaux excessivement simples. «Il y a une foule de travaux réalisés juste pour trouver le seuil», explique Robert Ziff, de l'université du Michigan. «Le nombre de systèmes différents que l'on a étudiés est stupéfiant.» Ce chercheur en physique statistique a créé une page Wikipédia qui répertorie les seuils de percolation pour des centaines de réseaux différents. Le seuil pour le réseau triangulaire vaut approximativement 0,347, une valeur déterminée analytiquement, mais la vaste majorité des nombres figurant sur cette page (notamment le seuil de percolation du réseau cubique) sont des approximations obtenues au moyen de simulations sur ordinateur.

Les exemples de réseaux ci-dessus sont de bons modèles pour la percolation dans les systèmes physiques tels que les roches fracturées, où les pores ont des positions fixes avec des fissures les liant entre eux aléatoirement. Mais d'autres

exemples réels sont beaucoup plus compliqués. Dans les réseaux maillés FireChat et Bridgify mentionnés plus haut, par exemple, la localisation des nœuds (les téléphones des manifestants de Hong Kong) changeait constamment. Les arêtes d'un tel réseau, c'est-à-dire ses connexions, se forment quand deux téléphones sont suffisamment proches l'un de l'autre, c'est-à-dire dans les limites de la portée de quelques dizaines de mètres des applications Bluetooth utilisées pour partager les messages. Ces réseaux sont décrits par un modèle différent, dit de «percolation continue», parce que les nœuds du réseau maillé peuvent se trouver n'importe où dans un espace continu.

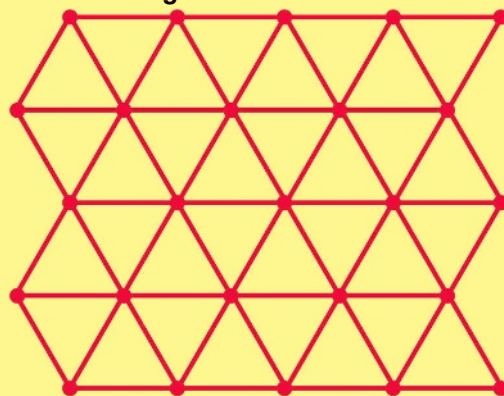
PERCOLATION DANS DES RÉSEAUX DE NŒUDS MOBILES

Comme tout modèle mathématique, la version abstraite de ce réseau est fondée sur des hypothèses simplifiées. Les téléphones sont dispersés aléatoirement, sans imiter les amas naturels ou les motifs observés sur une carte des déplacements de personnes, et deux téléphones sont reliés en ne tenant compte que de la distance qui les sépare, et pas de la présence éventuelle de murs ou d'autres interférences. Le modèle met néanmoins en lumière le rôle central de la théorie de la percolation dans les réseaux maillés réels.

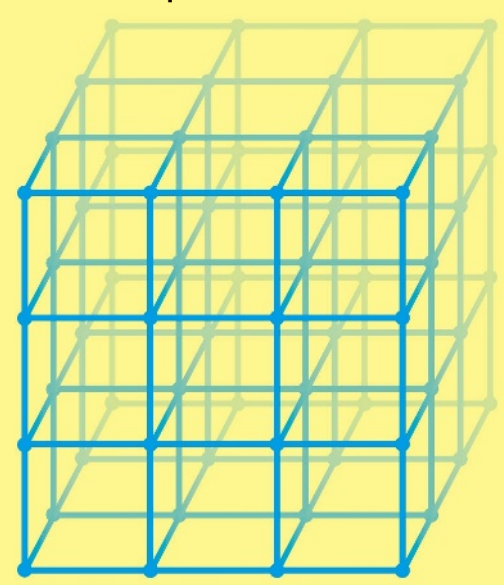
Il y a deux façons d'augmenter la connectivité de ce réseau à percolation continue: permettre une connexion directe à plus longue portée, ou ajouter davantage de téléphones (autrement dit, augmenter la densité des utilisateurs). On peut envisager ces modifications comme des «boutons» jouant un rôle similaire à ceux du réseau de tuyaux; en les tournant vers la droite, on augmente la connectivité. Et dans ces modèles, «il existe un point de bascule qui fait passer de la connectivité locale à la connectivité globale», explique Benedikt Jahnel.

Pour les concepteurs d'applications de réseaux maillés, trouver le seuil de percolation est un problème d'ingénierie pratique. Changer la puissance de l'appareil, qui contrôle la portée, est une façon de tourner le bouton. La question centrale, explique Ram Ramanathan, chercheur principal au sein de l'entreprise américaine de réseaux maillés goTenna, est: «Quelle est la puissance émettrice dont vous avez besoin pour avoir un réseau connecté?» La réponse serait

Réseau triangulaire



Réseau cubique



relativement simple s'il y avait une relation linéaire entre puissance et connectivité, si chaque petite augmentation de puissance amenait une petite augmentation proportionnelle de la connectivité. Mais l'existence d'un seuil de percolation signifie qu'il y a un risque que le réseau perde soudainement sa connectivité si les utilisateurs se déplacent. La puissance optimale est celle qui garantit que le réseau soit toujours connecté, mais sans gaspiller d'énergie.

L'autre « bouton » est la densité de téléphones. Les réseaux maillés à portée fixe ont besoin d'une densité critique d'utilisateurs, et ont de meilleures chances de permettre une connectivité étendue lors d'événements rassemblant beaucoup de monde, comme un festival de musique, un match de foot ou une grande manifestation.

Jorge Rios, PDG et cofondateur de Bridgefy, indique ainsi que son entreprise a observé des pics importants de nouveaux utilisateurs au Cachemire, au Nigeria, à Hong Kong et en Iran durant les périodes de troubles civils, quand les gens se sont tournés vers les réseaux maillés pour maintenir les communications au cas où le gouvernement couperait internet ou la foule saturerait les connexions cellulaires. Certains quartiers, comme Red Hook à Brooklyn, à New York, utilisent des réseaux maillés pour étendre l'accès à internet en installant des nœuds permanents au sommet des bâtiments. Une bonne partie du matériel nécessaire et de la technologie d'acheminement est encore en pleine évolution, mais on imagine aisément des applications futuristes audacieuses : par exemple, des véhicules autonomes pourraient communiquer directement, afin de partager de l'information sur le trafic ou les dangers de la route, sans nécessiter d'infrastructure supplémentaire.

RÉSEAUX ÉPIDÉMIQUES

Les réseaux utilisés pour modéliser l'écoulement d'un fluide dans une roche ou les communications directes entre téléphones reproduisent la structure spatiale de ces systèmes : deux nœuds sont connectés par une arête si les objets qu'ils représentent sont proches l'un de l'autre dans l'espace physique. Mais pour des réseaux qui suivent la propagation d'une maladie contagieuse d'un individu à l'autre, les liens sont aussi déterminés par la manière dont l'agent pathogène se transmet. Ces réseaux sont particulièrement enchevêtrés : une personne infectée qui passe une heure dans une boîte de nuit peut passer un virus à une autre personne qui va dans les jours suivants le transporter à l'autre bout du pays, ou même sur un autre continent.

Les modèles épidémiologiques les plus simples classent tous les individus en trois catégories (réceptifs, infectés et rétablis) et négligent cette structure complexe des connexions. Dans ces modèles, les personnes

infectées transmettent la maladie à des personnes aléatoires de la catégorie réceptive, avec l'hypothèse que tous les individus de ce groupe (étudiants d'une résidence universitaire, habitants d'une ville...) ont le même risque d'être contaminés. Le taux de nouvelles infections des personnes réceptives dépend du taux de reproduction de base, c'est-à-dire du nombre moyen d'infections secondaires créées par une personne contagieuse, abrégé en R_0 . Si R_0 est supérieur à 1, alors le virus gagne du terrain ; si ce nombre est inférieur à 1, l'épidémie régresse.



La structure d'un réseau épidémique dépend beaucoup de la maladie considérée

Cependant, en pratique, la façon dont les gens interagissent influe sur la propagation globale de la maladie. Par exemple, en 2003, l'épidémie de SRAS (syndrome respiratoire aigu sévère) avait initialement des valeurs de R_0 comprises entre 2,2 et 3,6, mais le nombre de cas sur cette période était « beaucoup plus bas qu'attendu sur la base d'un calcul simple », écrivait en 2006 Lauren Meyers, qui dirige aujourd'hui le Consortium de modélisation du Covid-19 à l'université du Texas.

Ce désaccord serait dû, selon elle, à l'hypothèse que « tous les individus réceptifs ont le même risque d'être infectés », hypothèse qui ignore la forme complexe des réseaux de contacts des personnes. En particulier, les valeurs de R_0 estimées pour le SRAS étaient fondées sur sa propagation rapide au sein d'immeubles d'habitation et d'hôpitaux, qui présentent des « taux particulièrement élevés de contacts rapprochés entre individus » par rapport à la population générale. Mais parce que les personnes infectées par le SRAS tombaient malades assez rapidement, elles étaient hospitalisées avant d'avoir pu infecter beaucoup de personnes.

Les arêtes d'un réseau épidémique expriment des relations particulières. Dans un réseau montrant la propagation potentielle du virus du sida, par exemple, deux personnes sont connectées par une arête si elles ont échangé des fluides corporels. Un réseau montrant la propagation potentielle du Covid-19 a une structure d'arêtes très différente, qui représente les contacts