

UNE CONJECTURE DIABOLIQUE

Lothar Collatz (1910-1990) était un mathématicien allemand qui, outre une carrière universitaire brillante, fut pendant des années le chroniqueur anonyme d'une rubrique de mathématiques récréatives publiée dans l'hebdomadaire allemand *Die Zeit*. Il introduisit en 1937 la conjecture qui porte aujourd'hui son nom et qui est la suivante : « Quel que soit l'entier $n \geq 1$, en le divisant par deux s'il est pair ($n \rightarrow n/2$) ou en le remplaçant par $3n + 1$ ($n \rightarrow 3n + 1$) s'il est impair, et en recommençant (exemple : $6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$), on arrive toujours à 1. »

Cette conjecture porte le nom de « conjecture de Syracuse », « conjecture de Collatz », ou plus simplement « conjecture $3x + 1$ ».

En 1960, le mathématicien Shizuo Kakutani écrivait : « Pendant un mois, tout le monde à l'université Yale a travaillé dessus, sans résultat. Un phénomène similaire s'est produit lorsque je l'ai mentionnée à l'université de Chicago. On a plaisanté en disant que ce problème résultait d'une conspiration visant à ralentir la recherche mathématique aux États-Unis. »

Année après année, des calculs de plus en plus massifs et astucieux ont été tentés ; ils ont tous confirmé la conjecture. Des centaines d'articles l'abondent, mais il faut se méfier, car de fausses preuves ont été maintes fois proposées, que bien sûr on trouve sur internet. C'est ainsi qu'en moins d'une heure j'ai réuni douze preuves de la conjecture, ou plutôt douze documents prétendant en présenter la solution.

Aucun d'eux cependant n'a été publié dans une revue reconnue de mathématiques procédant à des expertises sérieuses des articles qu'on lui envoie. Chacun doit savoir que l'illusion d'avoir une solution naît facilement — ces douze articles l'attestent — et que la seule façon de faire reconnaître un résultat concernant la conjecture est de le faire publier dans une revue spécialisée de mathématiques.

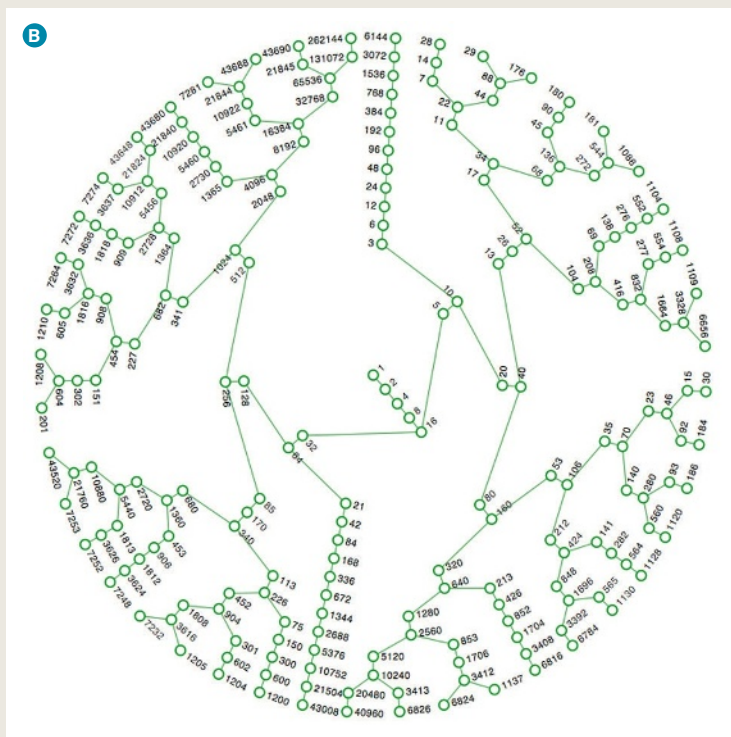
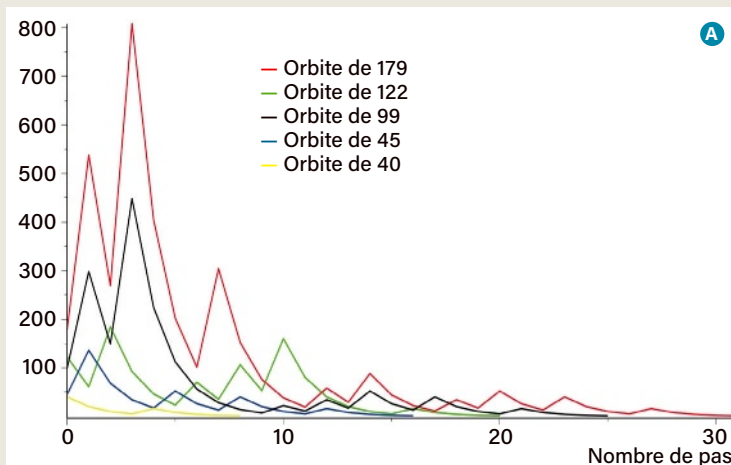
Notons que si l'on remplace $3n + 1$ par $3n - 1$, on trouve facilement plusieurs cycles, dont les deux suivants : (5, 14, 7, 20, 10) ; (17, 50, 25, 74, 37, 110, 55, 164, 82, 41, 122, 61, 192, 91, 272, 136, 68, 34).

Il faut donc tenter de comprendre ce qui est spécifique à $3n + 1$. Terence Tao, qui pourtant a travaillé sur le sujet et a récemment fait avancer le sujet (voir le texte), met en garde : « C'est l'une des plus dangereuses conjectures connues. Elle est réputée pour sa capacité à faire perdre une quantité massive de temps aussi bien aux mathématiciens amateurs qu'aux professionnels. »

Sur le schéma A, on a représenté les suites (ou « orbites ») que l'on

obtient en partant de 122 (en vert), 179 (en rouge), 45 (en bleu), 99 (en noir), 40 (en jaune).

Sur le graphique B, tous les chemins mènent à 1 : en suivant les flèches, on retrace le calcul d'un grand nombre d'orbites, toutes allant vers 1. Si l'on pouvait faire un dessin infini et que la conjecture de Collatz était vraie, tous les entiers seraient présents et appartiendraient chacun à un chemin aboutissant au centre.



2

QUELQUES PROPRIÉTÉS
DES ORBITES

Ces graphiques proviennent de l'étude numérique de la conjecture de Collatz ; ils visualisent des propriétés des orbites que l'on ne soupçonnerait pas.

A : 2 000 orbites. On a superposé les 2 000 premières orbites. Certaines orbites s'élèvent très haut ; les deux pointes de même forme correspondent aux entiers 1 819 et 1 915, dont les orbites montent jusqu'à 1 276 936.

B : Longueur des orbites. Pour chaque entier n entre 1 et 20 000, on a calculé la longueur h de l'orbite de n et on a placé le point de coordonnées (n, h) sur le dessin. Les petits traits horizontaux proviennent du fait que souvent des n ayant des valeurs proches produisent des orbites de même longueur. Par exemple 100, 101, 102, 103 donnent des orbites de longueur 25 ; de même, 164, 165, 166 donnent des orbites de longueur 111.

C : Maxima atteints. Pour chaque entier n entre 1 et 5 000, on a calculé la valeur maximale m atteinte par l'orbite de n et on a placé le point $(n, \log(m))$ sur le dessin. On observe que le maximum m augmente en moyenne avec n , ce qui n'est pas étonnant. Plus surprenante est la ligne horizontale à la hauteur 9,13. Elle correspond à des orbites pour lesquelles le maximum est 9 232 dont le logarithme est 9,13. Ce maximum est atteint pour $n = 27$, puis ensuite assez souvent. Ainsi, entre 0 et 100, le maximum d'une orbite est 9 232 pour les entiers suivants : 27, 31, 41, 47, 54, 55, 62, 63, 71, 73, 82, 83, 91, 94, 95, 97.

D : Records de hauteur. Pour chaque entier n entre 1 et 20 000, on a calculé la valeur maximum m atteinte par l'orbite d'un entier inférieur à n . Ce m est le record de hauteur jusqu'à n . Ce record est évidemment croissant et reste constant quand n augmente, sans battre le record. Les échelles pour n et pour m sont logarithmiques : pour chaque n on a dessiné le point $(\log(n), \log(m))$. Le fait que la courbe monte approximativement comme une droite de pente 2 signifie que, en gros, le maximum de hauteur atteint avant n augmente comme n^2 , ce que les calculs de David Barina ont confirmé bien au-delà de 20 000.

E. Records de longueur. Pour chaque entier n entre 1 et 50 000, on a calculé la valeur maximum m de la longueur (nombre de pas) d'une orbite d'un entier inférieur à n . Ce m est le record de longueur jusqu'à n . L'échelle pour n est logarithmique et en racine carrée pour m : on a représenté les points de coordonnées $(\log(n), \sqrt{m})$. La courbe semble proche d'une droite de pente $3/2$, ce qui signifie que le record de longueur pour n est approximativement $(1,5 \log(n))^2$.

