

2

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ORBITES

Ces graphiques proviennent de l'étude numérique de la conjecture de Collatz ; ils visualisent des propriétés des orbites que l'on ne soupçonnerait pas.

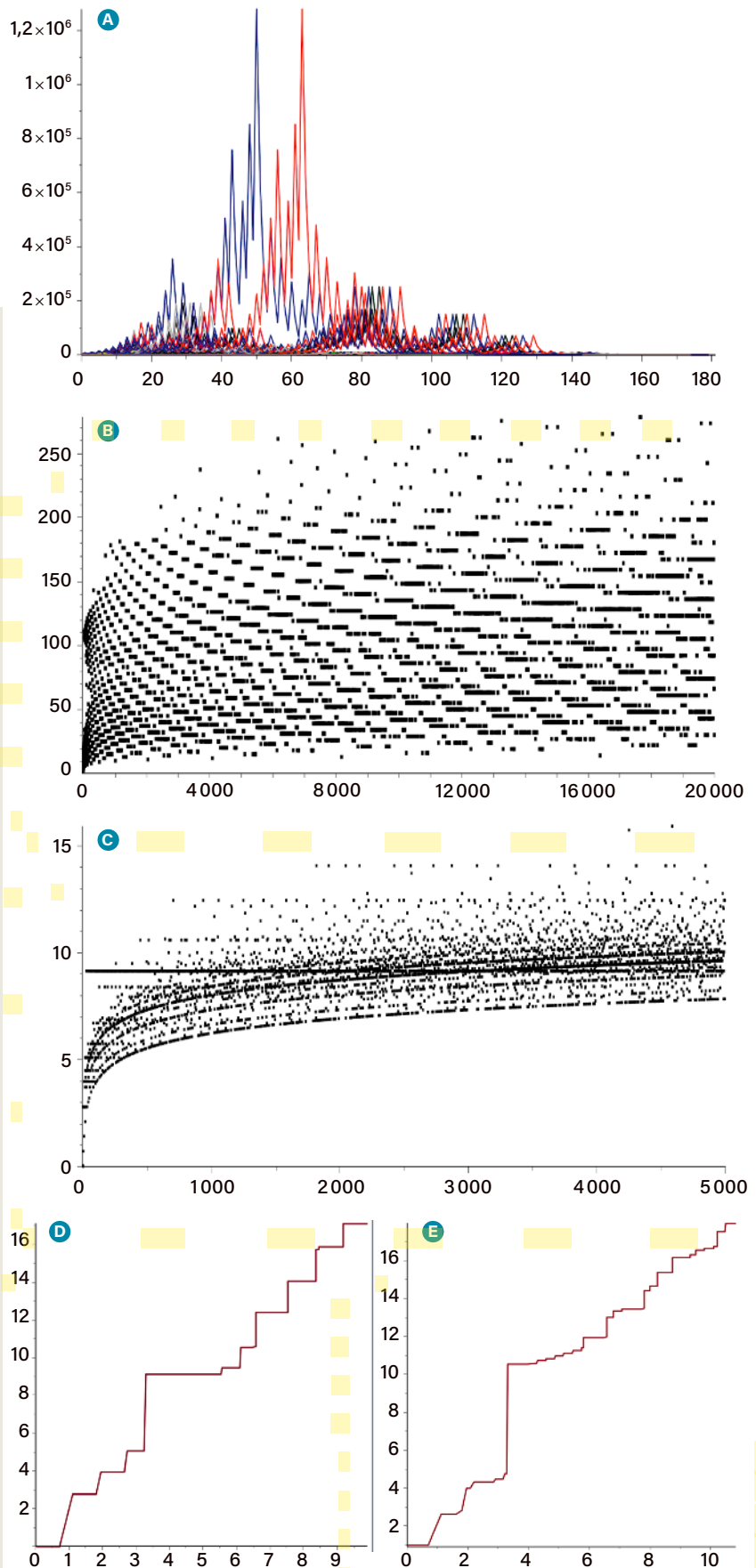
A : 2 000 orbites. On a superposé les 2 000 premières orbites. Certaines orbites s'élèvent très haut ; les deux pointes de même forme correspondent aux entiers 1 819 et 1 915, dont les orbites montent jusqu'à 1 276 936.

B : Longueur des orbites. Pour chaque entier n entre 1 et 20 000, on a calculé la longueur h de l'orbite de n et on a placé le point de coordonnées (n, h) sur le dessin. Les petits traits horizontaux proviennent du fait que souvent des n ayant des valeurs proches produisent des orbites de même longueur. Par exemple 100, 101, 102, 103 donnent des orbites de longueur 25 ; de même, 164, 165, 166 donnent des orbites de longueur 111.

C : Maxima atteints. Pour chaque entier n entre 1 et 5 000, on a calculé la valeur maximale m atteinte par l'orbite de n et on a placé le point $(n, \log(m))$ sur le dessin. On observe que le maximum m augmente en moyenne avec n , ce qui n'est pas étonnant. Plus surprenante est la ligne horizontale à la hauteur 9,13. Elle correspond à des orbites pour lesquelles le maximum est 9 232 dont le logarithme est 9,13. Ce maximum est atteint pour $n = 27$, puis ensuite assez souvent. Ainsi, entre 0 et 100, le maximum d'une orbite est 9 232 pour les entiers suivants : 27, 31, 41, 47, 54, 55, 62, 63, 71, 73, 82, 83, 91, 94, 95, 97.

D : Records de hauteur. Pour chaque entier n entre 1 et 20 000, on a calculé la valeur maximum m atteinte par l'orbite d'un entier inférieur à n . Ce m est le record de hauteur jusqu'à n . Ce record est évidemment croissant et reste constant quand n augmente, sans battre le record. Les échelles pour n et pour m sont logarithmiques : pour chaque n on a dessiné le point $(\log(n), \log(m))$. Le fait que la courbe monte approximativement comme une droite de pente 2 signifie que, en gros, le maximum de hauteur atteint avant n augmente comme n^2 , ce que les calculs de David Barina ont confirmé bien au-delà de 20 000.

E. Records de longueur. Pour chaque entier n entre 1 et 50 000, on a calculé la valeur maximum m de la longueur (nombre de pas) d'une orbite d'un entier inférieur à n . Ce m est le record de longueur jusqu'à n . L'échelle pour n est logarithmique et en racine carrée pour m : on a représenté les points de coordonnées $(\log(n), \sqrt{m})$. La courbe semble proche d'une droite de pente 3/2, ce qui signifie que le record de longueur pour n est approximativement $(1,5 \log(n))^2$.



3

indéfiniment, prenant de façon cyclique les valeurs 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

(b) Existence d'orbites infinies: pour certains n , l'orbite de n ne prend jamais deux fois la même valeur et donc tend vers l'infini quand k tend vers l'infini.

(c) Existence de cycles nouveaux: pour certains n , l'orbite de n prend deux fois une valeur autre que 4, 2 ou 1, et alors elle tourne en rond, puisqu'une fois qu'elle est revenue à une valeur déjà prise, les calculs redonnent les mêmes résultats.

Pour prouver la conjecture de Collatz, il faut démontrer que les cas (b) et (c) ne se présentent jamais. On peut prouver qu'elle est fausse en trouvant un entier initial n qui donne une suite n_k tendant vers l'infini quand k tend vers l'infini, ou en trouvant un n qui donne un cycle autre que (4, 2, 1).

La première chose à tenter est bien sûr de trouver des entiers n pour les cas (b) ou (c), ce qui indiquerait que la conjecture est fausse.

DONNÉES RÉCENTES

David Bařina, de l'université de Brno, en République tchèque, détient aujourd'hui le record de vérification. Pour aller très loin dans la vérification de la conjecture, on ne se contente pas de prendre les entiers les uns après les autres en calculant l'orbite jusqu'à arriver à 1. On élabore d'abord une série d'astuces qui accélèrent les calculs. Voici trois exemples de telles astuces.

– On veut vérifier la conjecture jusqu'à un certain entier Max, par exemple 1000000. Si l'on démontre que pour tout entier n avec $1 < n \leq \text{Max}$, l'orbite de n passe en dessous de n , cela suffira. En effet, partant d'un $n \leq \text{Max}$, l'orbite de n passera par un entier n' plus petit que n ; à partir de ce n' , on sera certain d'arriver à un entier n'' plus petit que n' , etc. On sera donc assuré que l'orbite de n passe par des valeurs de plus en plus petites, donc finit par atteindre 1.

– Si un entier positif est pair, soit $n = 2m$, alors son orbite passe au-dessous de n , car dès le premier point calculé de l'orbite, on tombe

sur $n_1 = m < n$. D'après notre raisonnement précédent, pour vérifier la conjecture jusqu'à Max, il suffit donc de ne mener de calcul que pour les nombres impairs.

– Si un entier est de la forme $n = 4m + 1$, avec n entier, les premières valeurs de son orbite sont $n_1 = 12m + 4$ (car n est impair), $n_2 = 6m + 2$ (car n_1 est pair), $n_3 = 3m + 1 < n$ (car n_2 est pair) et donc l'orbite passe sous son point de départ. Comme pour les nombres pairs, on peut donc sauter tous les nombres de la forme $4m + 1$.

Ainsi, parmi les quatre classes de nombres $\{4m\}$, $\{4m+1\}$, $\{4m+2\}$, $\{4m+3\}$, seule la quatrième doit être étudiée. L'utilisation de ces trois petites astuces fait donc déjà gagner 75% du calcul de vérification.

La méthode de David Bařina va bien au-delà de ces trois astuces et, grâce à elle, il a vérifié la conjecture jusqu'à $452 \times 2^{60} = 5,211 \times 10^{20}$. Cela ne serait possible par un calcul sans accélération qu'en utilisant une partie importante de tous les dispositifs de calcul sur Terre. En effet, le calcul d'une orbite exige plusieurs milliers d'instructions en moyenne pour les nombres considérés, et donc, pour arriver à 5×10^{20} sans accélération, il faudrait mettre en œuvre une puissance de calcul d'au moins 10^{24} instructions; or la puissance cumulée de tous les dispositifs de calcul sur Terre a un ordre de grandeur évaluée à 10^{23} instructions par seconde. (Pour une mise à jour en continu des résultats du calcul mené par David Bařina, voir: <http://pcbarina.fit.vutbr.cz>)

Une prédiction formulée par Jeffrey Lagarias, grand spécialiste de la conjecture à l'université du Michigan, est qu'en calculant toutes les orbites jusqu'à un entier n , la valeur record d'un point des orbites calculées sera de l'ordre de n^2 . Le calcul de David Bařina confirme cette prédiction: en allant jusqu'à 452×2^{60} , le record pour une valeur calculée provient de l'orbite de $n = 274\,133\,054\,632\,352\,106\,267$, qui passe par la valeur maximale $113\,298\,124\,744\,388\,651\,798\,242\,538\,014\,293\,435\,290\,632$, soit $n^{2,00872}$.

Signalons au passage que le calcul des orbites a eu des retombées indirectes: il a permis

SYRACUSE AVEC DES RÉELS NON ENTIERS

Il est naturel de se demander si l'on peut étendre le calcul des orbites de Collatz à tout nombre réel. En considérant la version compressée des orbites (après un nombre impair n , on le remplace directement par $(3n + 1)/2$ puisqu'on sait que $3n + 1$ sera pair), Marc Chamberland a proposé la fonction représentée ci-contre, qui pour chaque entier calcule ce qu'il faut ($n/2$ ou $(3n + 1)/2$) mais qui a un sens pour tout nombre réel x :

$f(x) = x + 1/4 - [(2x + 1)/4] \cos(\pi x)$. Chamberland a noté qu'il y a une infinité de points fixes x (tels que $f(x) = x$) qui sont des cycles à un seul élément. S'ajoute aussi, au cycle 4,2,1 que bien sûr on retrouve, le cycle suivant : 1,1925319070466... 2,1386563355167... Il montre aussi que certains réels donnent des orbites qui vont vers l'infini. Tout cela signifie que la conjecture devient fausse quand on passe des entiers aux nombres réels.

