

3

indéfiniment, prenant de façon cyclique les valeurs 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

(b) Existence d'orbites infinies: pour certains n , l'orbite de n ne prend jamais deux fois la même valeur et donc tend vers l'infini quand k tend vers l'infini.

(c) Existence de cycles nouveaux: pour certains n , l'orbite de n prend deux fois une valeur autre que 4, 2 ou 1, et alors elle tourne en rond, puisqu'une fois qu'elle est revenue à une valeur déjà prise, les calculs redonnent les mêmes résultats.

Pour prouver la conjecture de Collatz, il faut démontrer que les cas (b) et (c) ne se présentent jamais. On peut prouver qu'elle est fausse en trouvant un entier initial n qui donne une suite n_k tendant vers l'infini quand k tend vers l'infini, ou en trouvant un n qui donne un cycle autre que (4, 2, 1).

La première chose à tenter est bien sûr de trouver des entiers n pour les cas (b) ou (c), ce qui indiquerait que la conjecture est fausse.

DONNÉES RÉCENTES

David Bařina, de l'université de Brno, en République tchèque, détient aujourd'hui le record de vérification. Pour aller très loin dans la vérification de la conjecture, on ne se contente pas de prendre les entiers les uns après les autres en calculant l'orbite jusqu'à arriver à 1. On élabore d'abord une série d'astuces qui accélèrent les calculs. Voici trois exemples de telles astuces.

– On veut vérifier la conjecture jusqu'à un certain entier Max, par exemple 1000000. Si l'on démontre que pour tout entier n avec $1 < n \leq \text{Max}$, l'orbite de n passe en dessous de n , cela suffira. En effet, partant d'un $n \leq \text{Max}$, l'orbite de n passera par un entier n' plus petit que n ; à partir de ce n' , on sera certain d'arriver à un entier n'' plus petit que n' , etc. On sera donc assuré que l'orbite de n passe par des valeurs de plus en plus petites, donc finit par atteindre 1.

– Si un entier positif est pair, soit $n = 2m$, alors son orbite passe au-dessous de n , car dès le premier point calculé de l'orbite, on tombe

sur $n_1 = m < n$. D'après notre raisonnement précédent, pour vérifier la conjecture jusqu'à Max, il suffit donc de ne mener de calcul que pour les nombres impairs.

– Si un entier est de la forme $n = 4m + 1$, avec n entier, les premières valeurs de son orbite sont $n_1 = 12m + 4$ (car n est impair), $n_2 = 6m + 2$ (car n_1 est pair), $n_3 = 3m + 1 < n$ (car n_2 est pair) et donc l'orbite passe sous son point de départ. Comme pour les nombres pairs, on peut donc sauter tous les nombres de la forme $4m + 1$.

Ainsi, parmi les quatre classes de nombres $\{4m\}$, $\{4m+1\}$, $\{4m+2\}$, $\{4m+3\}$, seule la quatrième doit être étudiée. L'utilisation de ces trois petites astuces fait donc déjà gagner 75% du calcul de vérification.

La méthode de David Bařina va bien au-delà de ces trois astuces et, grâce à elle, il a vérifié la conjecture jusqu'à $452 \times 2^{60} = 5,211 \times 10^{20}$. Cela ne serait possible par un calcul sans accélération qu'en utilisant une partie importante de tous les dispositifs de calcul sur Terre. En effet, le calcul d'une orbite exige plusieurs milliers d'instructions en moyenne pour les nombres considérés, et donc, pour arriver à 5×10^{20} sans accélération, il faudrait mettre en œuvre une puissance de calcul d'au moins 10^{24} instructions; or la puissance cumulée de tous les dispositifs de calcul sur Terre a un ordre de grandeur évaluée à 10^{23} instructions par seconde. (Pour une mise à jour en continu des résultats du calcul mené par David Bařina, voir: <http://pcbarina.fit.vutbr.cz>)

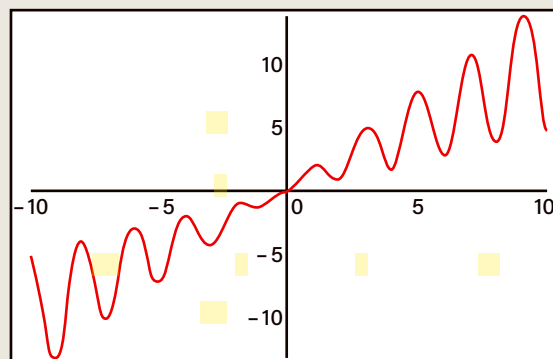
Une prédiction formulée par Jeffrey Lagarias, grand spécialiste de la conjecture à l'université du Michigan, est qu'en calculant toutes les orbites jusqu'à un entier n , la valeur record d'un point des orbites calculées sera de l'ordre de n^2 . Le calcul de David Bařina confirme cette prédiction: en allant jusqu'à 452×2^{60} , le record pour une valeur calculée provient de l'orbite de $n = 274\,133\,054\,632\,352\,106\,267$, qui passe par la valeur maximale $113\,298\,124\,744\,388\,651\,798\,242\,538\,014\,293\,435\,290\,632$, soit $n^{2,00872}$.

Signalons au passage que le calcul des orbites a eu des retombées indirectes: il a permis

SYRACUSE AVEC DES RÉELS NON ENTIERS

Il est naturel de se demander si l'on peut étendre le calcul des orbites de Collatz à tout nombre réel. En considérant la version compressée des orbites (après un nombre impair n , on le remplace directement par $(3n + 1)/2$ puisqu'on sait que $3n + 1$ sera pair), Marc Chamberland a proposé la fonction représentée ci-contre, qui pour chaque entier calcule ce qu'il faut ($n/2$ ou $(3n + 1)/2$) mais qui a un sens pour tout nombre réel x :

$f(x) = x + 1/4 - [(2x + 1)/4]\cos(\pi x)$. Chamberland a noté qu'il y a une infinité de points fixes x (tels que $f(x) = x$) qui sont des cycles à un seul élément. S'ajoute aussi, au cycle 4,2,1 que bien sûr on retrouve, le cycle suivant : 1,1925319070466... 2,1386563355167... Il montre aussi que certains réels donnent des orbites qui vont vers l'infini. Tout cela signifie que la conjecture devient fausse quand on passe des entiers aux nombres réels.



de concevoir une nouvelle méthode de multiplication, une technique de marquage d'images pour les signer et les protéger de la copie, une méthode de chiffage des fichiers sonores et un générateur de suites pseudoaléatoires.

PAS D'AUTRES CYCLES COURTS

On pourrait penser que mener une vérification très loin n'a guère d'intérêt, car il restera toujours une infinité d'entiers dont on ignorera si les orbites aboutissent à 1. Ce n'est pas vrai: Shalom Eliahou, de l'université du Littoral-Côte-d'Opale à Calais, a démontré qu'un calcul de vérification de la conjecture produit des informations sur les cycles possibles. Plus la vérification est poussée loin, plus la taille d'un éventuel cycle autre que (4, 2, 1) doit être grande.

Jusqu'en 2020, les résultats de Shalom Eliahou permettaient d'affirmer que s'il existe un autre cycle que (4, 2, 1), alors il contient au moins 17 milliards d'éléments, 17026679261 pour être précis. Mieux encore, grâce au calcul récent de David Bařina, on sait aujourd'hui que s'il existe un cycle autre que (4, 2, 1), il contient au moins 186 milliards d'éléments, 186265759595 pour être précis. Cela ne démontre pas qu'il n'existe pas d'autres cycles, mais on a quand même le sentiment d'avancer... et ce n'est pas la peine d'espérer trouver un cycle en lançant un calcul avec votre ordinateur!

DU CÔTÉ DE LA THÉORIE

Il ne faut pas croire que le problème n'intéresse que les informaticiens et les amateurs séduits par l'énoncé particulièrement simple de la conjecture. En réalité, plusieurs mathématiciens éminents y ont consacré du temps et ont produit quelques résultats.

Le Britannique John Conway a établi qu'il ne fallait pas s'étonner que le problème résiste, car certains problèmes proches sont indécidables. Voyons ce que cela signifie. Conway introduit la notation $f(n) = n/2 \mid 3n+1$ pour désigner la fonction au cœur de la conjecture, et il la généralise en $f(n) = a_1n+b_1 \mid a_2n+b_2 \mid \dots \mid a_kn+b_k$, où les a_i et b_i sont des nombres rationnels

(quotients de deux entiers). La fonction définie par cette notation a le sens suivant: si a_1n+b_1 est un entier, alors $f(n) = a_1n+b_1$; sinon, on examine a_2n+b_2 , si c'est un entier, c'est lui qui donne $f(n)$; sinon, on examine a_3n+b_3 , etc.

Conway a prouvé que quel que soit le système S non contradictoire d'axiomes qu'on utilise pour démontrer des propositions mathématiques, il existe une fonction de cette famille dont l'une des orbites n'aboutit pas à 1, ce que le système S ne peut pas démontrer. Conway est revenu sur ce problème en 2013 et a indiqué qu'il était convaincu que la conjecture de Collatz était elle-même indémontrable avec les systèmes d'axiomes utilisés aujourd'hui en mathématiques.

RÉSULTATS POSITIFS

Concernant les résultats théoriques positifs, on dispose maintenant de trois résultats de la forme «la conjecture de Collatz est presque vraie».

Le premier a été démontré en 1976 et est dû au mathématicien américano-estonien Rihō Terras. Il indique que la proportion $\text{Pr}(m)$ d'entiers n entre 1 et m qui vérifient que n_k passe en dessous de n tend vers 1 quand m tend vers l'infini. Prouver que tous les entiers n ont une orbite passant en dessous de n démontrerait la conjecture (voir page précédente la première astuce de calcul que nous avons mentionnée). Le résultat de Terras y parvient presque, mais il montre seulement que la proportion des n qui ne passent pas sous leur point de départ est inférieure à tout nombre positif fixé à l'avance pourvu qu'on aille assez loin. Il y a peut-être des exceptions, mais elles ont un poids qui devient nul.

Le deuxième résultat a été démontré par le mathématicien slovaque Ivan Korec en 1994. Il améliore celui de Terras: la proportion $\text{Pr}'(m)$ d'entiers entre 1 et m qui vérifient que l'orbite de n passe en dessous de $n^{0,7925}$ tend vers 1 quand m tend vers l'infini. C'est une amélioration du résultat de Terras, car $n^{0,7925} < n$. Ainsi, $1000^{0,7925} = 238$. Non seulement pour presque tout n l'orbite de n passe en dessous

4

CHEVELURES D'ORBITES

On associe à chaque orbite de Collatz le dessin d'un fil, dont le principe est le suivant. On part vers la droite en dessinant un court segment et, à chaque nouvelle étape, on ajoute un petit segment dont la taille diminue et qui prolonge les précédents en tournant un peu vers la droite si l'étape est paire, et un peu vers la gauche si l'étape est impaire. Comme

les étapes paires sont plus nombreuses que les étapes impaires, l'angle de rotation vers la gauche est pris plus petit que l'angle de rotation vers la droite. En regroupant ces fils, on obtient d'étranges figures, dont voici un exemple dû à Vitaliy Kaurov (voir <https://community.wolfram.com/groups/-/m/t/558256>).

