de concevoir une nouvelle méthode de multiplication, une technique de marquage d'images pour les signer et les protéger de la copie, une méthode de chiffrage des fichiers sonores et un générateur de suites pseudoaléatoires.

PAS D'AUTRES CYCLES COURTS

On pourrait penser que mener une vérification très loin n'a guère d'intérêt, car il restera toujours une infinité d'entiers dont on ignorera si les orbites aboutissent à 1. Ce n'est pas vrai: Shalom Eliahou, de l'université du Littoral-Côte-d'Opale à Calais, a démontré qu'un calcul de vérification de la conjecture produit des informations sur les cycles possibles. Plus la vérification est poussée loin, plus la taille d'un éventuel cycle autre que (4, 2, 1) doit être grande.

Jusqu'en 2020, les résultats de Shalom Eliahou permettaient d'affirmer que s'il existe un autre cycle que (4, 2, 1), alors il contient au moins 17 milliards d'éléments, 17026679261 pour être précis. Mieux encore, grâce au calcul récent de David Bařina, on sait aujourd'hui que s'il existe un cycle autre que (4, 2, 1), il contient au moins 186 milliards d'éléments, 186265759595 pour être précis. Cela ne démontre pas qu'il n'existe pas d'autres cycles, mais on a quand même le sentiment d'avancer... et ce n'est pas la peine d'espérer trouver un cycle en lançant un calcul avec votre ordinateur!

DU CÔTÉ DE LA THÉORIE

Il ne faut pas croire que le problème n'intéresse que les informaticiens et les amateurs séduits par l'énoncé particulièrement simple de la conjecture. En réalité, plusieurs mathématiciens éminents y ont consacré du temps et ont produit quelques résultats.

Le Britannique John Conway a établi qu'il ne fallait pas s'étonner que le problème résiste, car certains problèmes proches sont indécidables. Voyons ce que cela signifie. Conway introduit la notation $f(n) = n/2 \mid 3n+1$ pour désigner la fonction au cœur de la conjecture, et il la généralise en $f(n) = a_1n+b_1 \mid a_2n+b_2 \mid \ldots \mid a_kn+b_k$, où les a_i et b_i sont des nombres rationnels (quotients de deux entiers). La fonction définie par cette notation a le sens suivant: si a_1n+b_1 est un entier, alors $f(n) = a_1n+b_1$; sinon, on examine a_2n+b_2, si c'est un entier, c'est lui qui donne $f(n)$; sinon, on examine a_3n+b_3, etc.

Conway a prouvé que quel que soit le système S non contradictoire d'axiomes qu'on utilise pour démontrer des propositions mathématiques, il existe une fonction de cette famille dont l'une des orbites n'aboutit pas à 1, ce que le système S ne peut pas démontrer. Conway est revenu sur ce problème en 2013 et a indiqué qu'il était convaincu que la conjecture de Collatz était elle-même indémontrable avec les systèmes d'axiomes utilisés aujourd'hui en mathématiques.

RÉSULTATS POSITIFS

Concernant les résultats théoriques positifs, on dispose maintenant de trois résultats de la forme «la conjecture de Collatz est presque vraie».

Le premier a été démontré en 1976 et est dû au mathématicien américano-estonien Riho Terras. Il indique que la proportion $\mathrm{Pr}(m)$ d'entiers n entre 1 et m qui vérifient que n_k passe en dessous de n tend vers 1 quand m tend vers l'infini. Prouver que tous les entiers n ont une orbite passant en dessous de n démontrerait la conjecture (*voir page précédente la première astuce de calcul que nous avons mentionnée*). Le résultat de Terras y parvient presque, mais il montre seulement que la proportion des n qui ne passent pas sous leur point de départ est inférieure à tout nombre positif fixé à l'avance pourvu qu'on aille assez loin. Il y a peut-être des exceptions, mais elles ont un poids qui devient nul.

Le deuxième résultat a été démontré par le mathématicien slovaque Ivan Korec en 1994. Il améliore celui de Terras: la proportion $\mathrm{Pr}'(m)$ d'entiers entre 1 et m qui vérifient que l'orbite de n passe en dessous de $n^{0,7925}$ tend vers 1 quand m tend vers l'infini. C'est une amélioration du résultat de Terras, car $n^{0,7925} < n$. Ainsi, $1000^{0,7925} = 238$. Non seulement pour presque tout n l'orbite de n passe en dessous

4

CHEVELURES D'ORBITES

On associe à chaque orbite de Collatz le dessin d'un fil, dont le principe est le suivant. On part vers la droite en dessinant un court segment et, à chaque nouvelle étape, on ajoute un petit segment dont la taille diminue et qui prolonge les précédents en tournant un peu vers la droite si l'étape est paire, et un peu vers la gauche si l'étape est impaire. Comme les étapes paires sont plus nombreuses que les étapes impaires, l'angle de rotation vers la gauche est pris plus petit que l'angle de rotation vers la droite. En regroupant ces fils, on obtient d'étranges figures, dont voici un exemple dû à Vitaliy Kaurov (voir https://community.wolfram.com/groups/-/m/t/558256).

© Vitaliy Kaurov

de n, mais elle passe en dessous de $n^{0,7925}$, qui est plus petit.

Le troisième résultat indiquant que la conjecture est presque vraie est dû à Terence Tao. Ce prolifique et célèbre mathématicien australien a démontré en 2019 que non seulement en allant assez loin, presque toutes les orbites passent sous leur point de départ, mais qu'elles font beaucoup mieux : pour presque tout entier n, l'orbite de n passe sous $\log(n)$, qui est bien plus petit que $n^{0,7925}$. Et mieux encore, on peut remplacer $\log(n)$ par $\log(\log(n))$, ou par $\log(\log(\log(n)))$, etc. Les fonctions $\log(n)$, $\log(\log(n))$, etc. sont très lentement croissantes et par exemple $\log(\log(10^{100}) = 5{,}439\ldots$ Le résultat est un progrès considérable par rapport à ce que l'on savait.

Voici deux précisions omises dans un premier temps pour faciliter la compréhension du remarquable résultat de Terence Tao. D'une part, le résultat n'est pas vrai uniquement pour les fonctions combinant des logarithmes, mais pour toute fonction $f(n)$ qui tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, cela quelle que soit la lenteur avec laquelle elle va vers l'infini.

D'autre part, la notion de « presque » du résultat de Tao est un peu différente de celle des théorèmes de Terras et Korec. Pour mesurer le poids d'un sous-ensemble A de l'ensemble des entiers, on ne considère pas que chaque entier pèse un poids identique (c'est la méthode de Terras et Korec), mais on considère que le poids de l'entier n est $1/n$. Concrètement, dire « pour presque tout entier n, l'orbite de n passe sous $f(n)$ » signifie pour Terence Tao que « la somme des $1/n$ pour les entiers dont l'orbite passe sous $f(n)$ et qui sont inférieurs à un m donné, divisée par la somme des $1/n$ pour les n compris entre 1 et m, tend vers 1 quand m tend vers l'infini. »

L'INTELLIGENCE ARTIFICIELLE À LA RESCOUSSE ?

Abordons une piste qui repose sur des méthodes de démonstration automatique. Avec ces méthodes, on peut envisager que même si la preuve est très longue et inaccessible à l'entendement humain, alors elle sera à la portée des ordinateurs que l'on utilisera.

Pour expliquer l'idée, présentons d'abord un résultat de Liesbeth De Mol, chercheuse du CNRS à l'université de Lille, qui ramène le calcul avec des entiers à une manipulation simple de trois symboles. Plutôt que calculer avec des nombres, elle propose de considérer un système de transformation d'un mot en un autre défini par trois règles :

$$a \to bc,\ b \to a,\ c \to aaa.$$

Le principe des calculs est le suivant. On part d'un mot quelconque formé des lettres a, b et c, puis à chaque étape : (1) on ajoute à la fin du mot courant les lettres données par la règle associée à la première lettre du mot courant ; (2) on enlève deux lettres en tête du mot courant. Par exemple, ccabb donne abbaaa.

Les systèmes de ce type sont nommés « 2-tag systèmes ». Les k-tag systèmes ont été introduits par le mathématicien américain Emil Post en 1943 et sont étudiés en théorie du calcul. Ici, nous ne nous intéresserons qu'à ce 2-tag système particulier. Menons le calcul à partir du mot aaa :

aaa → abc → cbc → caaa → aaaaa → aaabc → abcbc → cbcbc → cbcaaa → caaaaaa → aaaaaaaa → aaaaaabc → aaaabcbc → aabcbcbc → bcbcbcbc → bcbcbca → bcbcaa → bcaaa → aaaa → aabc → bcbc → bca → aa → bc → a.

En retenant les mots composés uniquement de « a » (*en bleu*), on transforme 3 fois a en 5 fois a, puis en 8 fois a, 4 fois a, 2 fois a et enfin 1 fois a. Or l'orbite de 3 pour la conjecture de Collatz est par ailleurs $3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$. Les mots ne contenant que des « a » obtenus avec le 2-tag système de Liesbeth De Mol correspondent à cette orbite à ceci près qu'après un nombre impair, on omet le nombre pair qui suit.

Cette correspondance n'est pas une coïncidence et il a été démontré que partant d'une suite de n fois a, les suites de « a » qu'on obtiendra par le 2-tag système ont pour longueurs les entiers de l'orbite de n par Collatz en omettant le nombre pair qui suit chaque nombre impair. Le système simule Collatz sans faire ni division, ni addition, ni multiplication. Il en résulte que prouver la conjecture de Collatz revient à démontrer que, comme dans l'exemple, tout mot composé de « a » donne par le tag système le mot réduit à un seul « a ».

Or les problèmes de ce type, les « problèmes de terminaison d'un système de réécriture », se traduisent en problèmes de démonstration d'une formule de logique propositionnelle, c'est-à-dire sans quantificateur ni variable parcourant des ensembles infinis. On ramène donc le problème infini de Collatz avec des entiers à des problèmes finis de logique élémentaire, problèmes pour lesquels on dispose de méthodes de démonstration automatique très efficaces : plusieurs conjectures arithmétiques ont pu être résolues par cette méthode de transformation.

Les mathématiciens ont été frappés et peut-être vexés de rester impuissants face à la conjecture d'apparence si simple. L'aide des ordinateurs leur a déjà donné des informations sur la taille d'un contre-exemple possible allant vers l'infini, qui ne peut être que l'orbite d'un entier d'au moins 20 chiffres décimaux, et sur la taille d'un cycle autre que (4, 2, 1), qui doit avoir au moins 180 milliards de points. On tente maintenant de faire engendrer automatiquement à l'ordinateur la démonstration attendue, qui, même si aucun humain ne pourrait seul la vérifier, serait un soulagement ! ■

BIBLIOGRAPHIE

E. Yolcu *et al.*, **An automated approach to the Collatz conjecture,** prépublication arXiv:2105.14697, 2021.

D. Bařina, **Convergence verification of the Collatz problem,** *J. Supercomput.*, vol. 77, pp. 2681–2688, 2021.

D. Bařina, **Multiplication algorithm based on Collatz function,** *Theory of Computing Systems,* vol. 64, pp. 1331–1337, 2020.

T. Tao, **Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values,** prépublication arXiv:1909.03562, 2019.

J. Conway, **Unsettleable Arithmetical Problems,** *The Amer. Math. Monthly,* vol. 120(3), pp. 192-198, 2013.

S. Eliahou, **Le problème 3N + 1 (I, II et III),** *Images des mathématiques* (https://images.math.cnrs.fr/), 2011.

J. Lagarias, **The Ultimate Challenge : The 3x + 1 Problem,** American Mathematical Society, 2010.

L. De Mol, **Tag systems and Collatz-like functions**, *Theoretical Computer Science,* vol. 390, pp. 92-101, 2008.