

de n , mais elle passe en dessous de $n^{0,7925}$, qui est plus petit.

Le troisième résultat indiquant que la conjecture est presque vraie est dû à Terence Tao. Ce prolifique et célèbre mathématicien australien a démontré en 2019 que non seulement en allant assez loin, presque toutes les orbites passent sous leur point de départ, mais qu'elles font beaucoup mieux : pour presque tout entier n , l'orbite de n passe sous $\log(n)$, qui est bien plus petit que $n^{0,7925}$. Et mieux encore, on peut remplacer $\log(n)$ par $\log(\log(n))$, ou par $\log(\log(\log(n)))$, etc. Les fonctions $\log(n)$, $\log(\log(n))$, etc. sont très lentement croissantes et par exemple $\log(\log(10^{100}))=5,439...$. Le résultat est un progrès considérable par rapport à ce que l'on savait.

Voici deux précisions omises dans un premier temps pour faciliter la compréhension du remarquable résultat de Terence Tao. D'une part, le résultat n'est pas vrai uniquement pour les fonctions combinant des logarithmes, mais pour toute fonction $f(n)$ qui tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, cela quelle que soit la lenteur avec laquelle elle va vers l'infini.

D'autre part, la notion de «presque» du résultat de Tao est un peu différente de celle des théorèmes de Terras et Korec. Pour mesurer le poids d'un sous-ensemble A de l'ensemble des entiers, on ne considère pas que chaque entier pèse un poids identique (c'est la méthode de Terras et Korec), mais on considère que le poids de l'entier n est $1/n$. Concrètement, dire «pour presque tout entier n , l'orbite de n passe sous $f(n)$ » signifie pour Terence Tao que «la somme des $1/n$ pour les entiers dont l'orbite passe sous $f(n)$ et qui sont inférieurs à un m donné, divisée par la somme des $1/n$ pour les n compris entre 1 et m , tend vers 1 quand m tend vers l'infini.»

L'INTELLIGENCE ARTIFICIELLE À LA RESCOURSSE ?

Abordons une piste qui repose sur des méthodes de démonstration automatique. Avec ces méthodes, on peut envisager que même si la preuve est très longue et inaccessible à l'entendement humain, alors elle sera à la portée des ordinateurs que l'on utilisera.

Pour expliquer l'idée, présentons d'abord un résultat de Liesbeth De Mol, chercheuse du CNRS à l'université de Lille, qui ramène le calcul avec des entiers à une manipulation simple de trois symboles. Plutôt que calculer avec des nombres, elle propose de considérer un système de transformation d'un mot en un autre défini par trois règles :

$a \rightarrow bc, b \rightarrow a, c \rightarrow aaa$.

Le principe des calculs est le suivant. On part d'un mot quelconque formé des lettres a , b et c , puis à chaque étape : (1) on ajoute à la fin du mot courant les lettres données par la règle associée à la première lettre du mot

courant ; (2) on enlève deux lettres en tête du mot courant. Par exemple, $ccabb$ donne $abbaaa$.

Les systèmes de ce type sont nommés «2-tag systèmes». Les k -tag systèmes ont été introduits par le mathématicien américain Emil Post en 1943 et sont étudiés en théorie du calcul. Ici, nous ne nous intéresserons qu'à ce 2-tag système particulier. Menons le calcul à partir du mot aaa :

$aaa \rightarrow abc \rightarrow cbc \rightarrow caaa \rightarrow aaaaa \rightarrow aaabc \rightarrow abcbc \rightarrow cbc bc \rightarrow cbcaaa \rightarrow caaaaaa \rightarrow aaaaaaa \rightarrow aaaaaabc \rightarrow aaaabcbc \rightarrow aabcbcbc \rightarrow bcbcbcbc \rightarrow bcbcbca \rightarrow bcbcaa \rightarrow bcaaa \rightarrow aaaa \rightarrow aabc \rightarrow bcbc \rightarrow bca \rightarrow aa \rightarrow bc \rightarrow a$.

En retenant les mots composés uniquement de «a» (en bleu), on transforme 3 fois a en 5 fois a , puis en 8 fois a , 4 fois a , 2 fois a et enfin 1 fois a . Or l'orbite de 3 pour la conjecture de Collatz est par ailleurs $3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Les mots ne contenant que des «a» obtenus avec le 2-tag système de Liesbeth De Mol correspondent à cette orbite à ceci près qu'après un nombre impair, on omet le nombre pair qui suit.

Cette correspondance n'est pas une coïncidence et il a été démontré que partant d'une suite de n fois a , les suites de «a» qu'on obtiendra par le 2-tag système ont pour longueurs les entiers de l'orbite de n par Collatz en omettant le nombre pair qui suit chaque nombre impair. Le système simule Collatz sans faire ni division, ni addition, ni multiplication. Il en résulte que prouver la conjecture de Collatz revient à démontrer que, comme dans l'exemple, tout mot composé de «a» donne par le tag système le mot réduit à un seul «a».

Or les problèmes de ce type, les «problèmes de terminaison d'un système de réécriture», se traduisent en problèmes de démonstration d'une formule de logique propositionnelle, c'est-à-dire sans quantificateur ni variable parcourant des ensembles infinis. On ramène donc le problème infini de Collatz avec des entiers à des problèmes finis de logique élémentaire, problèmes pour lesquels on dispose de méthodes de démonstration automatique très efficaces : plusieurs conjectures arithmétiques ont pu être résolues par cette méthode de transformation.

Les mathématiciens ont été frappés et peut-être vexés de rester impuissants face à la conjecture d'apparence si simple. L'aide des ordinateurs leur a déjà donné des informations sur la taille d'un contre-exemple possible allant vers l'infini, qui ne peut être que l'orbite d'un entier d'au moins 20 chiffres décimaux, et sur la taille d'un cycle autre que (4, 2, 1), qui doit avoir au moins 180 milliards de points. On tente maintenant de faire engendrer automatiquement à l'ordinateur la démonstration attendue, qui, même si aucun humain ne pourrait seul la vérifier, serait un soulagement ! ■

BIBLIOGRAPHIE

E. Yolcu et al., **An automated approach to the Collatz conjecture**, prépublication arXiv:2105.14697, 2021.

D. Bařina, **Convergence verification of the Collatz problem**, *J. Supercomput.*, vol. 77, pp. 2681–2688, 2021.

D. Bařina, **Multiplication algorithm based on Collatz function**, *Theory of Computing Systems*, vol. 64, pp. 1331–1337, 2020.

T. Tao, **Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values**, prépublication arXiv:1909.03562, 2019.

J. Conway, **Unsettling Arithmetic Problems**, *The Amer. Math. Monthly*, vol. 120(3), pp. 192–198, 2013.

S. Eliahou, **Le problème $3N + 1$ (I, II et III)**, *Images des mathématiques* (<https://images.math.cnrs.fr/>), 2011.

J. Lagarias, **The Ultimate Challenge : The $3x + 1$ Problem**, American Mathematical Society, 2010.

L. De Mol, **Tag systems and Collatz-like functions**, *Theoretical Computer Science*, vol. 390, pp. 92–101, 2008.