

L'ESSENTIEL

> La théorie des catégories offre une vision globale de différents domaines mathématiques. Elle y met ainsi en évidence des similitudes et des connexions jusque-là inconnues.

> Ce changement de point de vue a cependant l'inconvénient de gommer les détails de chaque domaine. Cette

approche ne fournit donc pas des résultats explicites, mais livre parfois des indices pour résoudre certains grands problèmes mathématiques.

> Des chercheurs d'autres disciplines se tournent vers cette théorie abstraite pour obtenir un nouvel éclairage sur leurs problèmes.

L'AUTRICE



MANON BISCHOFF
physicienne théoricienne de formation
et rédactrice à *Spektrum der Wissenschaft*

de l'université de la ville de New York. J'étais donc très enthousiaste quand j'ai entendu parler pour la première fois d'une branche des mathématiques qui aide à formuler clairement cette approche globale.»

Ce changement de point de vue a aussi ses inconvénients. Les spécialistes de la théorie des catégories planent si haut qu'ils ne fournissent que rarement des résultats explicites: ils ne résoudront jamais une équation différentielle ni ne calculeront une intégrale. D'un autre côté, ils pourraient découvrir des chemins inconnus qui mèneront à la solution d'un problème bien concret. Mais pour implémenter cette solution, il faut à un moment revenir sur terre et effectuer le travail dans le domaine approprié.

UNE TRÈS GRANDE GÉNÉRALITÉ

À ses débuts, la théorie des catégories a été accueillie avec scepticisme. Les mathématiciens s'y réfèrent souvent, avec une certaine dose d'humour, à du «non-sens abstrait». Néanmoins, le fait que cette branche des mathématiques soit parfois très utile est aujourd'hui incontestable. De nombreuses avancées de ces dernières décennies auraient été impossibles sans son aide. Par ailleurs, si elle est considérée comme l'une des branches les plus abstraites des mathématiques, la théorie des catégories apparaît de plus en plus dans d'autres domaines de la science, par exemple en informatique et en linguistique, afin d'aborder leurs problèmes spécifiques sous un nouvel éclairage.

Si cette théorie s'adapte si bien à une grande diversité de disciplines, c'est parce que les catégories sont définies en des termes très généraux. Une catégorie consiste en une collection d'objets qui peuvent être transformés les uns dans les autres grâce à ce qu'on nomme des «morphismes» (voir la figure ci-contre). Un exemple de catégorie est celle où les objets sont les entiers naturels (0, 1, 2, ...) et les morphismes les fonctions f qui, à un entier n , associent un entier m . Un autre exemple est la catégorie où les objets sont les surfaces, les morphismes étant les transformations qui déforment une surface en une autre. Plus généralement, on peut voir une catégorie comme une collection de flèches

(morphismes) reliant différents points (objets). Peu importent les entités exactes désignées par les flèches et les objets: ce qui compte, c'est la façon dont elles sont connectées.

Il y a environ soixante-dix ans, cette approche a conduit à un changement drastique de paradigme. Dans le cadre de la théorie des ensembles, sur laquelle repose la quasi-totalité des mathématiques, les objets de chaque domaine sont définis avec précision. En théorie des catégories, à l'inverse, les entiers naturels et les formes géométriques peuvent se confondre, alors que la catégorie des nombres reliés par des fonctions continues est radicalement différente de la catégorie des nombres reliés par des fonctions dérivables. Ici, un objet est complètement défini par ses relations aux autres objets de sa catégorie – qu'il s'agisse d'un nombre, d'une surface ou d'un objet plus abstrait. Cela peut surprendre, mais l'idée n'est pas nouvelle: en physique, par exemple, on identifie une particule dans un collisionneur en la bombardant avec d'autres particules et en étudiant leurs interactions.

DES FLÈCHES ET DES POINTS

Une catégorie consiste en une collection d'objets $A, B, C, \dots$ (points rouges) et de transformations $f, g, h, \dots$ (flèches violettes), nommées «morphismes». Chaque morphisme f relie exactement deux objets ($f: A \rightarrow B$). En outre, pour chaque objet, il doit exister un morphisme ($1_A: A \rightarrow A$) nommé «identité de A ». Étant donnés deux morphismes $f: A \rightarrow B$ et $g: B \rightarrow C$, il existe une loi de composition telle que $g \circ f: A \rightarrow C$, comme si l'on exécutait les deux morphismes l'un après l'autre. Cette loi est associative, c'est-à-dire qu'on a: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

