

L'ESSENTIEL

> La théorie des catégories offre une vision globale de différents domaines mathématiques. Elle y met ainsi en évidence des similitudes et des connexions jusque-là inconnues.

> Ce changement de point de vue a cependant l'inconvénient de gommer les détails de chaque domaine. Cette

approche ne fournit donc pas des résultats explicites, mais livre parfois des indices pour résoudre certains grands problèmes mathématiques.

> Des chercheurs d'autres disciplines se tournent vers cette théorie abstraite pour obtenir un nouvel éclairage sur leurs problèmes.

L'AUTRICE



MANON BISCHOFF

physicienne théoricienne de formation et rédactrice à *Spektrum der Wissenschaft*

de l'université de la ville de New York. J'étais donc très enthousiaste quand j'ai entendu parler pour la première fois d'une branche des mathématiques qui aide à formuler clairement cette approche globale.»

Ce changement de point de vue a aussi ses inconvénients. Les spécialistes de la théorie des catégories planent si haut qu'ils ne fournissent que rarement des résultats explicites: ils ne résoudront jamais une équation différentielle ni ne calculeront une intégrale. D'un autre côté, ils pourraient découvrir des chemins inconnus qui mèneront à la solution d'un problème bien concret. Mais pour implémenter cette solution, il faut à un moment revenir sur terre et effectuer le travail dans le domaine approprié.

UNE TRÈS GRANDE GÉNÉRALITÉ

À ses débuts, la théorie des catégories a été accueillie avec scepticisme. Les mathématiciens s'y réfèrent souvent, avec une certaine dose d'humour, à du «non-sens abstrait». Néanmoins, le fait que cette branche des mathématiques soit parfois très utile est aujourd'hui incontestable. De nombreuses avancées de ces dernières décennies auraient été impossibles sans son aide. Par ailleurs, si elle est considérée comme l'une des branches les plus abstraites des mathématiques, la théorie des catégories apparaît de plus en plus dans d'autres domaines de la science, par exemple en informatique et en linguistique, afin d'aborder leurs problèmes spécifiques sous un nouvel éclairage.

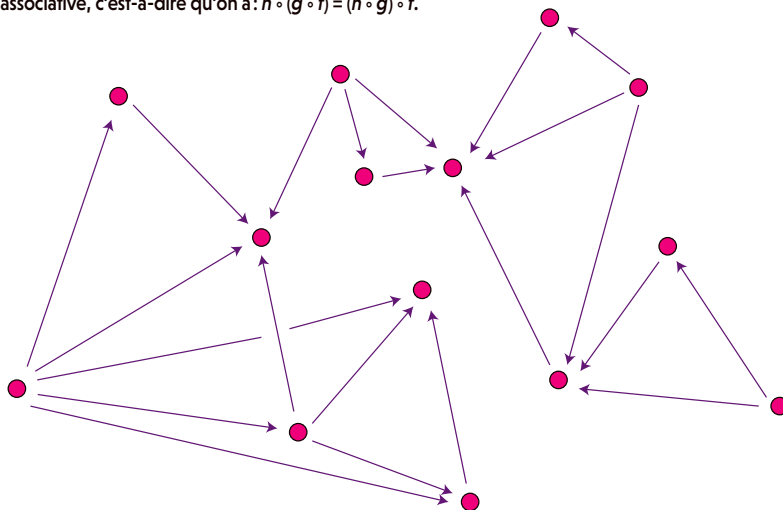
Si cette théorie s'adapte si bien à une grande diversité de disciplines, c'est parce que les catégories sont définies en des termes très généraux. Une catégorie consiste en une collection d'objets qui peuvent être transformés les uns dans les autres grâce à ce qu'on nomme des «morphismes» (voir la figure ci-contre). Un exemple de catégorie est celle où les objets sont les entiers naturels (0, 1, 2, ...) et les morphismes les fonctions f qui, à un entier n , associent un entier m . Un autre exemple est la catégorie où les objets sont les surfaces, les morphismes étant les transformations qui déforment une surface en une autre. Plus généralement, on peut voir une catégorie comme une collection de flèches

(morphismes) reliant différents points (objets). Peu importent les entités exactes désignées par les flèches et les objets: ce qui compte, c'est la façon dont elles sont connectées.

Il y a environ soixante-dix ans, cette approche a conduit à un changement drastique de paradigme. Dans le cadre de la théorie des ensembles, sur laquelle repose la quasi-totalité des mathématiques, les objets de chaque domaine sont définis avec précision. En théorie des catégories, à l'inverse, les entiers naturels et les formes géométriques peuvent se confondre, alors que la catégorie des nombres reliés par des fonctions continues est radicalement différente de la catégorie des nombres reliés par des fonctions dérivables. Ici, un objet est complètement défini par ses relations aux autres objets de sa catégorie – qu'il s'agisse d'un nombre, d'une surface ou d'un objet plus abstrait. Cela peut surprendre, mais l'idée n'est pas nouvelle: en physique, par exemple, on identifie une particule dans un collisionneur en la bombardant avec d'autres particules et en étudiant leurs interactions.

DES FLÈCHES ET DES POINTS

Une catégorie consiste en une collection d'objets $A, B, C, \dots$ (points rouges) et de transformations $f, g, h, \dots$ (flèches violettes), nommées «morphismes». Chaque morphisme f relie exactement deux objets ($f: A \rightarrow B$). En outre, pour chaque objet, il doit exister un morphisme ($1_A: A \rightarrow A$) nommé «identité de A ». Étant donnés deux morphismes $f: A \rightarrow B$ et $g: B \rightarrow C$, il existe une loi de composition telle que $g \circ f: A \rightarrow C$, comme si l'on exécutait les deux morphismes l'un après l'autre. Cette loi est associative, c'est-à-dire qu'on a: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.



La théorie des catégories fournit aux mathématiciens un cadre conceptuel qu'ils peuvent remplir avec des objets et des applications de leur domaine propre. En procédant ainsi, ils n'ont pas besoin de se focaliser sur les détails de chaque élément de leur domaine, il leur suffit de se concentrer sur les structures sous-jacentes.

Il est même possible d'aller plus loin et c'est là que la théorie des catégories prend toute son envergure. Comme la nature des objets que l'on met dans une catégorie n'a pas d'importance, il est possible de la remplir avec des catégories. On obtient des catégories d'ordre supérieur, ce qui permet de découvrir des ponts entre les différents domaines des mathématiques. Ces ponts correspondent précisément aux transformations nommées «foncteurs», qui font passer d'une catégorie à une autre (voir la figure page 34).

DESCARTES : UN FONCTEUR AVANT L'HEURE

Les foncteurs sont ainsi une généralisation des morphismes. L'un des exemples les plus célèbres de foncteur a été découvert par René Descartes au XVII^e siècle, bien avant le développement de la théorie des catégories. Le mathématicien français avait constaté que de nombreux problèmes de géométrie de son époque pouvaient être résolus par des équations algébriques. Il a alors introduit le système de coordonnées cartésiennes, qui a permis de connecter directement la géométrie et l'algèbre (voir l'encadré ci-contre).

La naissance de la théorie abstraite formalisant cette vision arrivera bien plus tard. En 1941, le mathématicien américain Saunders Mac Lane donna une série de six conférences à l'université du Michigan sur ses travaux les plus récents en théorie des nombres. N'ayant pu assister à la dernière séance, son collègue Samuel Eilenberg recontacta Mac Lane un peu plus tard. Ce dernier lui répéta le contenu de son séminaire. Eilenberg n'en croyait pas ses yeux : Mac Lane avait construit un objet mathématique qu'il avait déjà vu dans un tout autre contexte, en topologie.

Cette coïncidence était vraiment surprenante, car la topologie et la théorie des nombres avaient, à cette époque, peu de choses en commun. La topologie s'apparente à de la géométrie où l'on aurait oublié comment mesurer des distances et gardé seulement une notion de proximité des points. Elle décrit les formes, mais sans les détails métriques. Pour un topologue, deux objets obtenus l'un à partir de l'autre par une déformation continue, c'est-à-dire sans déchirement ni recollement, sont équivalents. De son côté, la théorie des nombres s'intéresse aux systèmes de nombres. Néanmoins, chacun de ces deux domaines est étroitement connecté à l'algèbre.

Les mathématiciens ont mis beaucoup de temps à comprendre que les concepts de topologie pouvaient eux aussi être reformulés dans un langage algébrique. Au début du XX^e siècle, la topologie algébrique faisait ses premiers pas. L'obstacle principal venait de la nature «imprécise» de la topologie. Par exemple, l'équation $x^2 + y^2 = 1$ correspond à un cercle ; or une ellipse, qui est topologiquement équivalente au cercle (il suffit de l'étirer pour obtenir cette nouvelle forme), est décrite par une équation différente.

Comme de telles équations ne semblaient pas être la bonne piste pour parler de topologie, les mathématiciens se sont tournés vers d'autres objets algébriques : les entiers. En utilisant ce qu'on nomme des invariants topologiques, les chercheurs classent les objets et déterminent s'ils sont similaires. Par exemple, on peut compter le nombre de trous que

GÉOMÉTRIE ET ALGÈBRE

Trois siècles avant la naissance de la théorie des catégories, René Descartes a mis au jour une connexion entre géométrie et algèbre. Alors que la géométrie s'occupe des collections de points dans l'espace, l'algèbre s'intéresse aux liens entre objets abstraits. Si, par exemple, vous cherchez les points d'intersection de deux courbes, vous pouvez soit les dessiner et lire le résultat dans le système de coordonnées, soit calculer les coordonnées qui satisfont aux deux équations des courbes. Les figures géométriques sont métamorphosées en équations.

Dans les années 1970, Alexandre Grothendieck a établi la preuve formelle que les deux domaines sont vraiment équivalents. À cette époque, du côté de l'algèbre, il travaillait sur la catégorie des anneaux commutatifs (des collections d'objets qui peuvent être additionnés ou multipliés, de la même façon que les nombres entiers, et où l'opération d'addition ou de multiplication ne dépend pas de l'ordre dans lequel les deux objets sont pris). L'ensemble des polynômes de la forme $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ constitue un exemple d'anneau commutatif. La catégorie de ces anneaux contient des applications f , qui transforment un anneau R en un autre anneau S ($f : R \rightarrow S$), c'est-à-dire qui transforme par exemple les polynômes en nombres réels, qui forment un autre anneau commutatif.

En géométrie, Grothendieck a aussi lancé une refondation du domaine en généralisant le type des objets considérés. Il a ainsi étudié la catégorie des « schémas affines », qui contient tous les espaces topologiques associés à des anneaux commutatifs.

Grâce à sa démarche de généralisation, avec d'un côté la catégorie des anneaux commutatifs et de l'autre la catégorie des schémas affines, Grothendieck a montré qu'il existe une correspondance univoque entre l'algèbre et la géométrie : pour chaque anneau commutatif, il existe exactement un schéma affine, et inversement (et en particulier, pour chaque polynôme, il existe une seule courbe algébrique). Du point de vue de la théorie des catégories, les deux catégories sont donc équivalentes. Ce pont permet de « traduire » un théorème d'un domaine et de l'exprimer (et de l'utiliser) dans l'autre domaine.

