

La théorie des catégories fournit aux mathématiciens un cadre conceptuel qu'ils peuvent remplir avec des objets et des applications de leur domaine propre. En procédant ainsi, ils n'ont pas besoin de se focaliser sur les détails de chaque élément de leur domaine, il leur suffit de se concentrer sur les structures sous-jacentes.

Il est même possible d'aller plus loin et c'est là que la théorie des catégories prend toute son envergure. Comme la nature des objets que l'on met dans une catégorie n'a pas d'importance, il est possible de la remplir avec des catégories. On obtient des catégories d'ordre supérieur, ce qui permet de découvrir des ponts entre les différents domaines des mathématiques. Ces ponts correspondent précisément aux transformations nommées «foncteurs», qui font passer d'une catégorie à une autre (voir la figure page 34).

DESCARTES : UN FONCTEUR AVANT L'HEURE

Les foncteurs sont ainsi une généralisation des morphismes. L'un des exemples les plus célèbres de foncteur a été découvert par René Descartes au XVII^e siècle, bien avant le développement de la théorie des catégories. Le mathématicien français avait constaté que de nombreux problèmes de géométrie de son époque pouvaient être résolus par des équations algébriques. Il a alors introduit le système de coordonnées cartésiennes, qui a permis de connecter directement la géométrie et l'algèbre (voir l'encadré ci-contre).

La naissance de la théorie abstraite formalisant cette vision arrivera bien plus tard. En 1941, le mathématicien américain Saunders Mac Lane donna une série de six conférences à l'université du Michigan sur ses travaux les plus récents en théorie des nombres. N'ayant pu assister à la dernière séance, son collègue Samuel Eilenberg recontacta Mac Lane un peu plus tard. Ce dernier lui répéta le contenu de son séminaire. Eilenberg n'en croyait pas ses yeux : Mac Lane avait construit un objet mathématique qu'il avait déjà vu dans un tout autre contexte, en topologie.

Cette coïncidence était vraiment surprenante, car la topologie et la théorie des nombres avaient, à cette époque, peu de choses en commun. La topologie s'apparente à de la géométrie où l'on aurait oublié comment mesurer des distances et gardé seulement une notion de proximité des points. Elle décrit les formes, mais sans les détails métriques. Pour un topologue, deux objets obtenus l'un à partir de l'autre par une déformation continue, c'est-à-dire sans déchirement ni recollement, sont équivalents. De son côté, la théorie des nombres s'intéresse aux systèmes de nombres. Néanmoins, chacun de ces deux domaines est étroitement connecté à l'algèbre.

Les mathématiciens ont mis beaucoup de temps à comprendre que les concepts de topologie pouvaient eux aussi être reformulés dans un langage algébrique. Au début du XX^e siècle, la topologie algébrique faisait ses premiers pas. L'obstacle principal venait de la nature «imprécise» de la topologie. Par exemple, l'équation $x^2 + y^2 = 1$ correspond à un cercle ; or une ellipse, qui est topologiquement équivalente au cercle (il suffit de l'étirer pour obtenir cette nouvelle forme), est décrite par une équation différente.

Comme de telles équations ne semblaient pas être la bonne piste pour parler de topologie, les mathématiciens se sont tournés vers d'autres objets algébriques : les entiers. En utilisant ce qu'on nomme des invariants topologiques, les chercheurs classent les objets et déterminent s'ils sont similaires. Par exemple, on peut compter le nombre de trous que

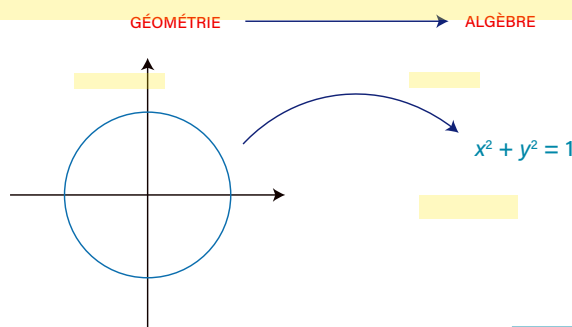
GÉOMÉTRIE ET ALGÈBRE

Trois siècles avant la naissance de la théorie des catégories, René Descartes a mis au jour une connexion entre géométrie et algèbre. Alors que la géométrie s'occupe des collections de points dans l'espace, l'algèbre s'intéresse aux liens entre objets abstraits. Si, par exemple, vous cherchez les points d'intersection de deux courbes, vous pouvez soit les dessiner et lire le résultat dans le système de coordonnées, soit calculer les coordonnées qui satisfont aux deux équations des courbes. Les figures géométriques sont métamorphosées en équations.

Dans les années 1970, Alexandre Grothendieck a établi la preuve formelle que les deux domaines sont vraiment équivalents. À cette époque, du côté de l'algèbre, il travaillait sur la catégorie des anneaux commutatifs (des collections d'objets qui peuvent être additionnés ou multipliés, de la même façon que les nombres entiers, et où l'opération d'addition ou de multiplication ne dépend pas de l'ordre dans lequel les deux objets sont pris). L'ensemble des polynômes de la forme $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ constitue un exemple d'anneau commutatif. La catégorie de ces anneaux contient des applications f , qui transforment un anneau R en un autre anneau S ($f : R \rightarrow S$), c'est-à-dire qui transforme par exemple les polynômes en nombres réels, qui forment un autre anneau commutatif.

En géométrie, Grothendieck a aussi lancé une refondation du domaine en généralisant le type des objets considérés. Il a ainsi étudié la catégorie des « schémas affines », qui contient tous les espaces topologiques associés à des anneaux commutatifs.

Grâce à sa démarche de généralisation, avec d'un côté la catégorie des anneaux commutatifs et de l'autre la catégorie des schémas affines, Grothendieck a montré qu'il existe une correspondance univoque entre l'algèbre et la géométrie : pour chaque anneau commutatif, il existe exactement un schéma affine, et inversement (et en particulier, pour chaque polynôme, il existe une seule courbe algébrique). Du point de vue de la théorie des catégories, les deux catégories sont donc équivalentes. Ce pont permet de « traduire » un théorème d'un domaine et de l'exprimer (et de l'utiliser) dans l'autre domaine.



comporte une surface. Ainsi, une baguette (zéro trou) et un bretzel (trois trous) diffèrent fondamentalement d'un point de vue topologique, alors qu'une tasse et un beignet de type *donut* sont similaires (un seul trou).

Même un enfant peut comprendre cette simple classification. Mais celle-ci peut être difficile à mettre en place de façon formelle. En deux dimensions, il est souvent possible de visualiser une forme pour en déduire le nombre de trous et son invariant topologique. Mais quand le nombre de dimensions augmente, le problème devient bien plus épineux.

Les mathématiciens ont donc cherché des méthodes algébriques pour détecter les trous. En 1895, Henri Poincaré a été l'un des premiers à comprendre qu'une façon de faire consiste à étudier toutes les courbes fermées que peut contenir la surface considérée. Si toutes ces courbes peuvent être contractées en un point comme un lasso sans quitter la surface, alors ce dernier est dénué de trou. C'est le cas d'une sphère (creuse). Sur un tore ou un *donut*, on distingue deux types de courbes qui ne peuvent pas se contracter en un point (voir la figure page 35).

DES OBJETS ALGÈBRIQUES POUR LES ESPACES TOPOLOGIQUES

Cependant, les objets de la topologie, les «espaces topologiques», ne sont pas toujours aussi simples qu'une sphère ou un tore. Ils peuvent être des objets disjoints dans un espace à grand nombre de dimensions, ou être composés d'éléments issus d'étranges systèmes de nombres. Ils sont alors plus difficiles à classer.

Dans les années 1920, la mathématicienne allemande Emmy Noether a remarqué qu'aux espaces topologiques on peut associer non seulement des entiers, mais aussi d'autres entités algébriques, les groupes. Parmi les versions les plus simples de ces derniers figurent les rotations ou les réflexions d'une figure géométrique. De façon générale, la définition d'un groupe est similaire à celle d'une catégorie : un groupe est un ensemble d'objets qui se combinent les uns avec les autres et qui présente un élément «neutre» (comme l'est le 1 dans la multiplication usuelle entre nombres). Mais un groupe doit satisfaire à une autre exigence : pour chaque élément du groupe, il existe un «inverse», de sorte que la combinaison de l'élément avec son inverse donne l'élément neutre.

Comme Noether l'a découvert, il existe un certain type de groupes, les «groupes d'homologie», dont les nombres caractéristiques, que l'on peut calculer, correspondent aux invariants des espaces topologiques. Si l'on déforme un espace sans changer les invariants associés, il existe des transformations similaires sur les groupes d'homologie, qui conservent également leurs nombres caractéristiques. Dès lors, s'il est

difficile de calculer les invariants d'un espace topologique, il peut être plus simple de travailler sur les groupes d'homologie associés.

Grâce à ce résultat, Noether a inauguré une nouvelle ère de la topologie algébrique. Étaient propulsés sur le devant de la scène non seulement les espaces topologiques, mais aussi leurs relations lorsqu'ils sont déformés de l'un vers l'autre. Pour chaque transformation qui modifie un espace sans y créer de nouveaux trous, il existe une application reliant les groupes d'homologie associés (voir l'encadré page 37). Ainsi, l'objectif principal de la théorie des catégories, qui consiste à mettre l'accent sur les relations entre les objets, commençait déjà à émerger et n'attendait qu'à être formalisé.

Avant son voyage à l'université du Michigan, Eilenberg travaillait sur des groupes d'homologie d'espaces compliqués. Mac Lane, de son côté, travaillait sur des groupes qui apparaissent en théorie des nombres. En effet, quand on relie certains nombres par des relations, une structure de groupe y est souvent associée. Par exemple, les nombres entiers munis de la loi d'addition forment un groupe. Dans les régions les plus abstraites de la théorie des nombres, il est souvent plus efficace et utile d'étudier les groupes associés que les nombres eux-mêmes.

À l'époque de ses séminaires, Mac Lane s'intéressait aux corps (une sorte de généralisation des nombres). Pour simplifier certains de ses calculs, il avait reformulé son problème grâce à l'algèbre. Pour y parvenir, il avait construit un type de groupe spécial, en utilisant une extension de groupes. En termes simples, une telle opération consiste à partir d'un groupe G et à le faire croître à l'aide d'un autre groupe H , de telle façon que le résultat soit encore un groupe.

Alors que Mac Lane lui présentait ses travaux, Eilenberg a aussitôt reconnu l'extension de groupe. Il l'avait déjà croisée dans les travaux de son collègue Norman Steenrod, qui l'avait utilisée pour étudier un certain espace topologique. Cet espace était obtenu en prenant un premier tore et un second enroulé un nombre p de fois à l'intérieur du premier. Le

Un foncteur relie une catégorie à une autre et des transformations naturelles permettent de passer d'un foncteur à un autre. Les mathématiciens ont généralisé cette idée en définissant des catégories de catégories.

