

comporte une surface. Ainsi, une baguette (zéro trou) et un bretzel (trois trous) diffèrent fondamentalement d'un point de vue topologique, alors qu'une tasse et un beignet de type *donut* sont similaires (un seul trou).

Même un enfant peut comprendre cette simple classification. Mais celle-ci peut être difficile à mettre en place de façon formelle. En deux dimensions, il est souvent possible de visualiser une forme pour en déduire le nombre de trous et son invariant topologique. Mais quand le nombre de dimensions augmente, le problème devient bien plus épineux.

Les mathématiciens ont donc cherché des méthodes algébriques pour détecter les trous. En 1895, Henri Poincaré a été l'un des premiers à comprendre qu'une façon de faire consiste à étudier toutes les courbes fermées que peut contenir la surface considérée. Si toutes ces courbes peuvent être contractées en un point comme un lasso sans quitter la surface, alors ce dernier est dénué de trou. C'est le cas d'une sphère (creuse). Sur un tore ou un *donut*, on distingue deux types de courbes qui ne peuvent pas se contracter en un point (voir la figure page 35).

DES OBJETS ALGÈBRIQUES POUR LES ESPACES TOPOLOGIQUES

Cependant, les objets de la topologie, les «espaces topologiques», ne sont pas toujours aussi simples qu'une sphère ou un tore. Ils peuvent être des objets disjoints dans un espace à grand nombre de dimensions, ou être composés d'éléments issus d'étranges systèmes de nombres. Ils sont alors plus difficiles à classer.

Dans les années 1920, la mathématicienne allemande Emmy Noether a remarqué qu'aux espaces topologiques on peut associer non seulement des entiers, mais aussi d'autres entités algébriques, les groupes. Parmi les versions les plus simples de ces derniers figurent les rotations ou les réflexions d'une figure géométrique. De façon générale, la définition d'un groupe est similaire à celle d'une catégorie : un groupe est un ensemble d'objets qui se combinent les uns avec les autres et qui présente un élément «neutre» (comme l'est le 1 dans la multiplication usuelle entre nombres). Mais un groupe doit satisfaire à une autre exigence : pour chaque élément du groupe, il existe un «inverse», de sorte que la combinaison de l'élément avec son inverse donne l'élément neutre.

Comme Noether l'a découvert, il existe un certain type de groupes, les «groupes d'homologie», dont les nombres caractéristiques, que l'on peut calculer, correspondent aux invariants des espaces topologiques. Si l'on déforme un espace sans changer les invariants associés, il existe des transformations similaires sur les groupes d'homologie, qui conservent également leurs nombres caractéristiques. Dès lors, s'il est

difficile de calculer les invariants d'un espace topologique, il peut être plus simple de travailler sur les groupes d'homologie associés.

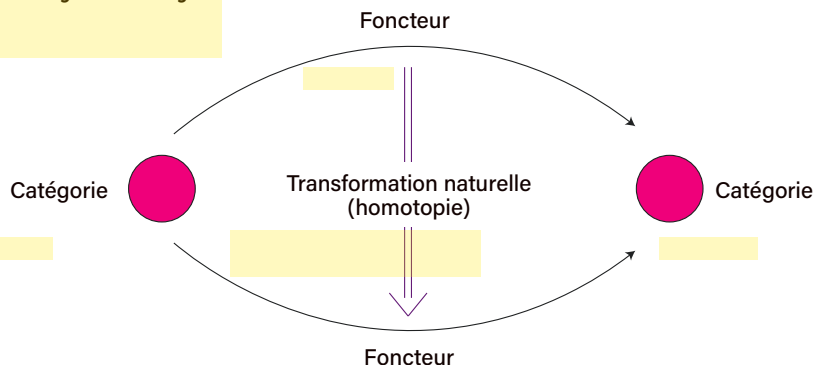
Grâce à ce résultat, Noether a inauguré une nouvelle ère de la topologie algébrique. Étaient propulsés sur le devant de la scène non seulement les espaces topologiques, mais aussi leurs relations lorsqu'ils sont déformés de l'un vers l'autre. Pour chaque transformation qui modifie un espace sans y créer de nouveaux trous, il existe une application reliant les groupes d'homologie associés (voir l'encadré page 37). Ainsi, l'objectif principal de la théorie des catégories, qui consiste à mettre l'accent sur les relations entre les objets, commençait déjà à émerger et n'attendait qu'à être formalisé.

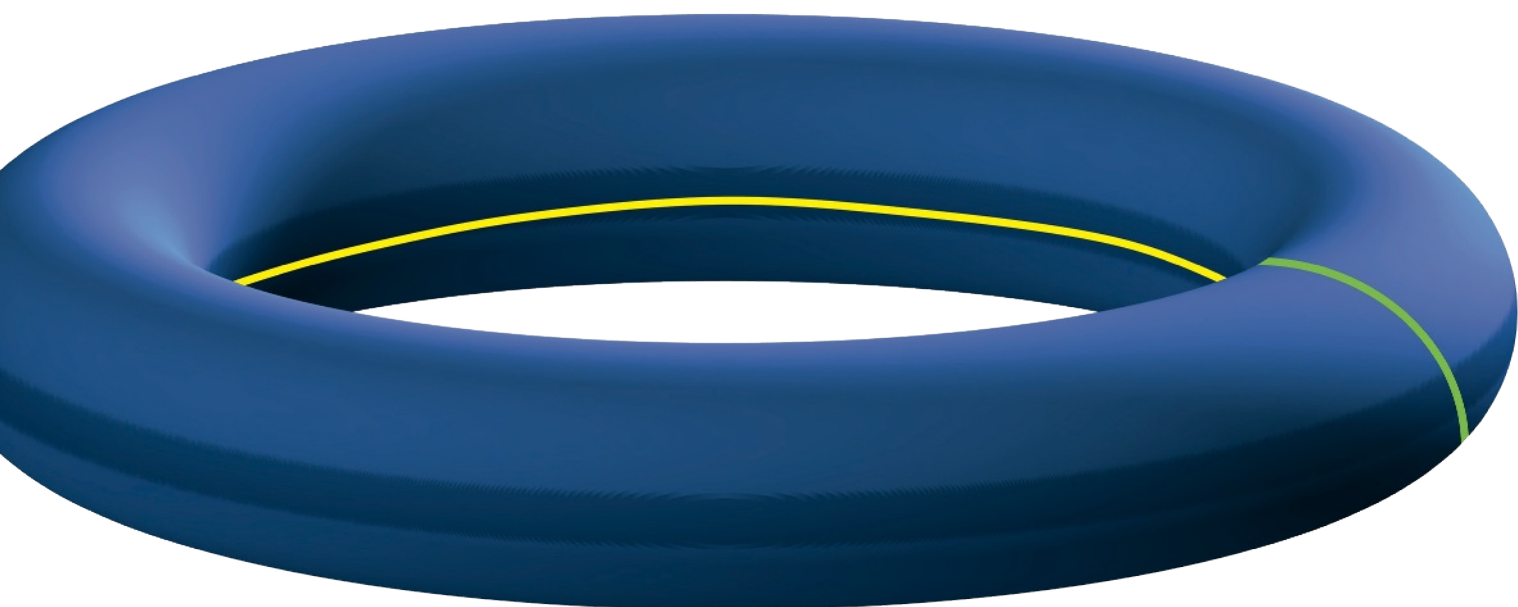
Avant son voyage à l'université du Michigan, Eilenberg travaillait sur des groupes d'homologie d'espaces compliqués. Mac Lane, de son côté, travaillait sur des groupes qui apparaissent en théorie des nombres. En effet, quand on relie certains nombres par des relations, une structure de groupe y est souvent associée. Par exemple, les nombres entiers munis de la loi d'addition forment un groupe. Dans les régions les plus abstraites de la théorie des nombres, il est souvent plus efficace et utile d'étudier les groupes associés que les nombres eux-mêmes.

À l'époque de ses séminaires, Mac Lane s'intéressait aux corps (une sorte de généralisation des nombres). Pour simplifier certains de ses calculs, il avait reformulé son problème grâce à l'algèbre. Pour y parvenir, il avait construit un type de groupe spécial, en utilisant une extension de groupes. En termes simples, une telle opération consiste à partir d'un groupe G et à le faire croître à l'aide d'un autre groupe H , de telle façon que le résultat soit encore un groupe.

Alors que Mac Lane lui présentait ses travaux, Eilenberg a aussitôt reconnu l'extension de groupe. Il l'avait déjà croisée dans les travaux de son collègue Norman Steenrod, qui l'avait utilisée pour étudier un certain espace topologique. Cet espace était obtenu en prenant un premier tore et un second enroulé un nombre p de fois à l'intérieur du premier. Le

Un foncteur relie une catégorie à une autre et des transformations naturelles permettent de passer d'un foncteur à un autre. Les mathématiciens ont généralisé cette idée en définissant des catégories de catégories.





groupe d'homologie associé correspondait au groupe étudié par Mac Lane. «Nous sommes restés réveillés toute la nuit pour essayer de comprendre d'où venait ce lien», a raconté Mac Lane. Cet épisode a marqué le début d'une collaboration riche et une amitié durable entre les deux chercheurs.

En plus du lien surprenant, les deux mathématiciens étaient fascinés par le fait que les calculs de Mac Lane étaient beaucoup plus simples que ceux associés aux espaces topologiques. En effet, il est souvent très difficile de faire des calculs avec les groupes d'homologie. En outre, après plusieurs mois d'un travail acharné, les chercheurs ont découvert que les extensions de groupes forment une sorte de pont entre différentes méthodes algébriques pour déterminer les propriétés topologiques d'un espace. Ainsi, quand une approche ne fonctionnait pas, les extensions de groupes pouvaient indiquer une autre piste pour étudier un espace topologique.

Durant les quelques années qui ont suivi, les deux chercheurs ont mis au jour d'autres correspondances entre l'algèbre et la topologie. «Il y en avait plus que nous ne l'anticipions, a noté Mac Lane. Nous étions obligés d'inventer des catégories pour les décrire.» À l'époque, ils ne définissaient pas encore des catégories à l'image des objets abstraits que l'on considère aujourd'hui, mais se limitaient au cas particulier d'une catégorie composée de groupes. Les catégories étaient pour eux un simple outil.

Dans un premier temps, les mathématiciens n'ont pas manifesté beaucoup d'intérêt pour ces catégories. Alexandre Grothendieck fut le premier à prendre la pleine mesure de l'utilité de ce concept abstrait. Il a été l'un des chercheurs les plus influents dans son domaine

au xx^e siècle (au moins jusqu'à sa retraite dans les montagnes de l'Ariège, où il s'est complètement coupé du monde extérieur).

Au début de sa carrière, Grothendieck travaillait sur des problèmes d'analyse (la branche des mathématiques qui s'intéresse au calcul infinitésimal et à son application dans de nombreux contextes). Au début des années 1950, il ne trouvait pas de poste en France car il refusait de prendre la nationalité française pour ne pas avoir à faire le service militaire. Apatride, il partit au Brésil puis aux États-Unis (avant de revenir en France en 1956), et son attention se porta sur d'autres branches des mathématiques.

UN APPORT DÉCISIF D'ALEXANDRE GROTHENDIECK

Lors d'un séjour à l'université du Kansas, Grothendieck se pencha sur la topologie algébrique. À cette époque, ce domaine était assez chaotique. Encore aujourd'hui, les chercheurs tentent de trouver une recette générique qui fournit le groupe d'homologie correspondant à un espace topologique. À défaut, ils ont développé diverses méthodes, nommées «théories d'homologies», qui diffèrent les unes des autres selon le type d'espace considéré. Grothendieck a établi une base commune pour de nombreuses théories d'homologies et en a aussi découvert de nouvelles.

Ces résultats ont été motivés par l'intérêt que portait Grothendieck à la notion de «faisceaux», des objets introduits par le mathématicien français Jean Leray en 1946 et qui apparaissent quand on étudie les structures algébriques sur un espace topologique compliqué. De façon formelle, les espaces topologiques sont définis comme une union d'ensembles (on «colle» des domaines individuels les uns aux

Contrairement à la sphère, il existe sur la surface d'un tore des courbes fermées qu'il est impossible de déformer continûment, sans quitter la surface, pour les contracter en un point (courbes jaune et verte, par exemple). Par cette approche, il est possible de déterminer le nombre de trous d'un objet topologique.