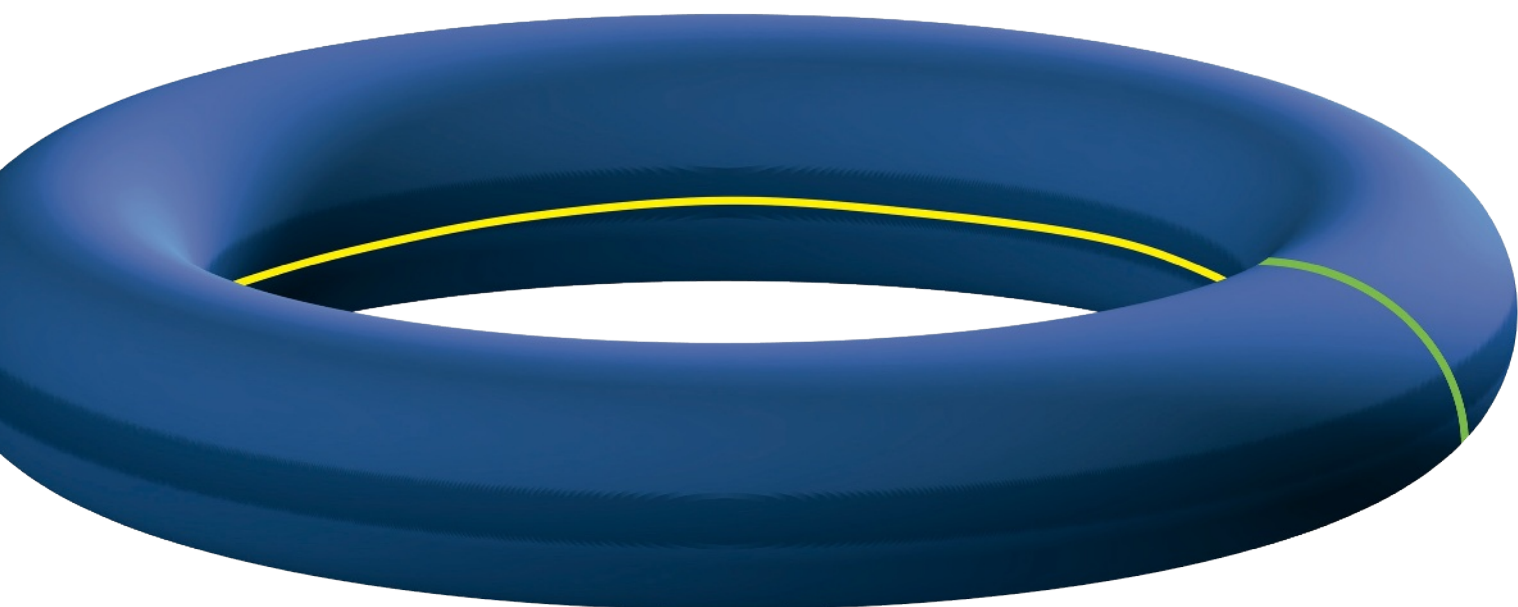




groupe d'homologie associé correspondait au groupe étudié par Mac Lane. «Nous sommes restés réveillés toute la nuit pour essayer de comprendre d'où venait ce lien», a raconté Mac Lane. Cet épisode a marqué le début d'une collaboration riche et une amitié durable entre les deux chercheurs.

En plus du lien surprenant, les deux mathématiciens étaient fascinés par le fait que les calculs de Mac Lane étaient beaucoup plus simples que ceux associés aux espaces topologiques. En effet, il est souvent très difficile de faire des calculs avec les groupes d'homologie. En outre, après plusieurs mois d'un travail acharné, les chercheurs ont découvert que les extensions de groupes forment une sorte de pont entre différentes méthodes algébriques pour déterminer les propriétés topologiques d'un espace. Ainsi, quand une approche ne fonctionnait pas, les extensions de groupes pouvaient indiquer une autre piste pour étudier un espace topologique.

Durant les quelques années qui ont suivi, les deux chercheurs ont mis au jour d'autres correspondances entre l'algèbre et la topologie. «Il y en avait plus que nous ne l'anticipions, a noté Mac Lane. Nous étions obligés d'inventer des catégories pour les décrire.» À l'époque, ils ne définissaient pas encore des catégories à l'image des objets abstraits que l'on considère aujourd'hui, mais se limitaient au cas particulier d'une catégorie composée de groupes. Les catégories étaient pour eux un simple outil.

Dans un premier temps, les mathématiciens n'ont pas manifesté beaucoup d'intérêt pour ces catégories. Alexandre Grothendieck fut le premier à prendre la pleine mesure de l'utilité de ce concept abstrait. Il a été l'un des chercheurs les plus influents dans son domaine

au xx^e siècle (au moins jusqu'à sa retraite dans les montagnes de l'Ariège, où il s'est complètement coupé du monde extérieur).

Au début de sa carrière, Grothendieck travaillait sur des problèmes d'analyse (la branche des mathématiques qui s'intéresse au calcul infinitésimal et à son application dans de nombreux contextes). Au début des années 1950, il ne trouvait pas de poste en France car il refusait de prendre la nationalité française pour ne pas avoir à faire le service militaire. Apatride, il partit au Brésil puis aux États-Unis (avant de revenir en France en 1956), et son attention se porta sur d'autres branches des mathématiques.

UN APPORT DÉCISIF D'ALEXANDRE GROTHENDIECK

Lors d'un séjour à l'université du Kansas, Grothendieck se pencha sur la topologie algébrique. À cette époque, ce domaine était assez chaotique. Encore aujourd'hui, les chercheurs tentent de trouver une recette générique qui fournit le groupe d'homologie correspondant à un espace topologique. À défaut, ils ont développé diverses méthodes, nommées «théories d'homologies», qui diffèrent les unes des autres selon le type d'espace considéré. Grothendieck a établi une base commune pour de nombreuses théories d'homologies et en a aussi découvert de nouvelles.

Ces résultats ont été motivés par l'intérêt que portait Grothendieck à la notion de «faisceaux», des objets introduits par le mathématicien français Jean Leray en 1946 et qui apparaissent quand on étudie les structures algébriques sur un espace topologique compliqué. De façon formelle, les espaces topologiques sont définis comme une union d'ensembles (on «colle» des domaines individuels les uns aux

Contrairement à la sphère, il existe sur la surface d'un tore des courbes fermées qu'il est impossible de déformer continûment, sans quitter la surface, pour les contracter en un point (courbes jaune et verte, par exemple). Par cette approche, il est possible de déterminer le nombre de trous d'un objet topologique.

autres). Quand on considère un objet algébrique comme une fonction sur un espace, on a besoin de savoir comment il se comporte aux points de contact entre les domaines collés. C'est à cette étape que la théorie des faisceaux apporte une aide précieuse.

Les faisceaux jouent aussi un rôle en physique, par exemple en théorie de la relativité générale, qui décrit la déformation de l'espace-temps due à la présence de masses ou d'énergie. Le mouvement de la matière dans un tel espace-temps est alors obtenu en résolvant les équations du mouvement dans un espace courbe. Les physiciens utilisent une astuce qui revient à ne considérer qu'une petite portion de l'espace, qui apparaît alors plate (de la même façon que la Terre nous semble plate autour de nous), puis à résoudre les équations en chaque point de l'espace-temps dans le cas d'un univers plat et, ensuite, à assembler les différentes solutions.

Cependant, la théorie des faisceaux fonctionne en général localement : elle permet

ambitieux. Il a entrepris de trouver un cadre global qui étendrait la notion de théorie d'homologies. Par cette approche, il ne traitait pas les catégories comme des outils, mais comme une théorie à part entière, fusionnant différentes branches des mathématiques. Il a ainsi mis au jour des connexions entre les connexions et a ainsi compris comment certaines théories d'homologies étaient reliées (il a trouvé des applications qui permettent de passer d'une théorie d'homologie à une autre). Il a aussi développé de toutes nouvelles théories d'homologies, dont une incluant les faisceaux.

Après ces découvertes révolutionnaires, Grothendieck s'est tourné vers un nouveau champ mathématique, la géométrie algébrique, où l'on étudie la géométrie d'objets décrits par des équations polynomiales (telles que $3x^4y^2 + 2x + 6y^2 + 5 = 0$). Là encore, il a profondément transformé la discipline grâce à la théorie des catégories.

Grothendieck a porté la géométrie algébrique à un niveau plus abstrait en étendant les objets d'intérêt au-delà des seuls polynômes, aux «anneaux». Ces structures ressemblent à des groupes, à la différence qu'elles sont munies de deux opérations internes au lieu d'une (comme l'addition et la multiplication). Par exemple, les polynômes (qui peuvent être additionnés ou multipliés entre eux pour donner de nouveaux polynômes) forment un anneau. En étudiant des objets géométriques nommés «schémas», définis non pas forcément par des anneaux de polynômes, mais plus généralement par des anneaux, le mathématicien a mis au jour des connexions inattendues entre la géométrie algébrique et d'autres pans des mathématiques, dont la théorie des nombres.

Grâce aux découvertes de Grothendieck et de bien d'autres qui ont montré la puissance de la théorie des catégories, celle-ci gagna en popularité. Dans sa thèse soutenue en 1963, l'Américain William Lawvere alla même plus loin en suggérant qu'il faudrait bâtir toutes les mathématiques sur la théorie des catégories, plutôt que sur la théorie des ensembles. Il était séduit par cette idée d'un cadre global dans lequel ce n'est pas la nature précise des objets qui compte, mais leurs connexions aux autres. Cependant, peu de mathématiciens ont suivi cette idée. Pour autant, note Tai-Danae Bradley, «de nombreux mathématiciens pensent de cette façon, même s'ils n'utilisent pas explicitement les concepts ou les théorèmes de la théorie des catégories».

Les différences d'approche de la théorie des ensembles et de la théorie des catégories sont à la source de nombreux débats. Par exemple, la définition de la notion d'équivalence diffère dans les deux cadres. En théorie des ensembles, il est facile de montrer que deux entités sont identiques, car ces objets sont précisément définis.

La théorie des catégories considère comme identiques deux objets s'ils sont isomorphes

d'étudier ce qui se passe au voisinage d'un point dans l'espace, mais sans considérer la structure globale. Par exemple, il n'y a pas de différence lorsqu'on colle ensemble des fonctions sur une surface cylindrique ou un ruban de Möbius. Or en topologie, on insiste sur les propriétés globales de l'espace – auquel cas le ruban de Möbius et le cylindre diffèrent fondamentalement. Dès lors, au milieu des années 1950, les mathématiciens cherchaient une théorie des faisceaux homologique qui expliquerait comment les caractéristiques globales d'un espace sont reliées à des objets algébriques définis dans cet espace.

Eilenberg pensait également qu'il devait exister une théorie des faisceaux homologique. Mais ni lui ni ses collègues ne parvenaient à en construire une. Seul Grothendieck trouva une solution, en prenant un détour et en considérant d'abord les catégories. Contrairement à Mac Lane et Eilenberg, qui utilisaient les catégories pour résoudre des problèmes particuliers, Grothendieck avait un objectif plus