

autres). Quand on considère un objet algébrique comme une fonction sur un espace, on a besoin de savoir comment il se comporte aux points de contact entre les domaines collés. C'est à cette étape que la théorie des faisceaux apporte une aide précieuse.

Les faisceaux jouent aussi un rôle en physique, par exemple en théorie de la relativité générale, qui décrit la déformation de l'espace-temps due à la présence de masses ou d'énergie. Le mouvement de la matière dans un tel espace-temps est alors obtenu en résolvant les équations du mouvement dans un espace courbe. Les physiciens utilisent une astuce qui revient à ne considérer qu'une petite portion de l'espace, qui apparaît alors plate (de la même façon que la Terre nous semble plate autour de nous), puis à résoudre les équations en chaque point de l'espace-temps dans le cas d'un univers plat et, ensuite, à assembler les différentes solutions.

Cependant, la théorie des faisceaux fonctionne en général localement : elle permet

ambitieux. Il a entrepris de trouver un cadre global qui étendrait la notion de théorie d'homologies. Par cette approche, il ne traitait pas les catégories comme des outils, mais comme une théorie à part entière, fusionnant différentes branches des mathématiques. Il a ainsi mis au jour des connexions entre les connexions et a ainsi compris comment certaines théories d'homologies étaient reliées (il a trouvé des applications qui permettent de passer d'une théorie d'homologie à une autre). Il a aussi développé de toutes nouvelles théories d'homologies, dont une incluant les faisceaux.

Après ces découvertes révolutionnaires, Grothendieck s'est tourné vers un nouveau champ mathématique, la géométrie algébrique, où l'on étudie la géométrie d'objets décrits par des équations polynomiales (telles que $3x^4y^2 + 2x + 6y^2 + 5 = 0$). Là encore, il a profondément transformé la discipline grâce à la théorie des catégories.

Grothendieck a porté la géométrie algébrique à un niveau plus abstrait en étendant les objets d'intérêt au-delà des seuls polynômes, aux « anneaux ». Ces structures ressemblent à des groupes, à la différence qu'elles sont munies de deux opérations internes au lieu d'une (comme l'addition et la multiplication). Par exemple, les polynômes (qui peuvent être additionnés ou multipliés entre eux pour donner de nouveaux polynômes) forment un anneau. En étudiant des objets géométriques nommés « schémas », définis non pas forcément par des anneaux de polynômes, mais plus généralement par des anneaux, le mathématicien a mis au jour des connexions inattendues entre la géométrie algébrique et d'autres pans des mathématiques, dont la théorie des nombres.

Grâce aux découvertes de Grothendieck et de bien d'autres qui ont montré la puissance de la théorie des catégories, celle-ci gagna en popularité. Dans sa thèse soutenue en 1963, l'Américain William Lawvere alla même plus loin en suggérant qu'il faudrait bâtir toutes les mathématiques sur la théorie des catégories, plutôt que sur la théorie des ensembles. Il était séduit par cette idée d'un cadre global dans lequel ce n'est pas la nature précise des objets qui compte, mais leurs connexions aux autres. Cependant, peu de mathématiciens ont suivi cette idée. Pour autant, note Tai-Danae Bradley, « de nombreux mathématiciens pensent de cette façon, même s'ils n'utilisent pas explicitement les concepts ou les théorèmes de la théorie des catégories ».

Les différences d'approche de la théorie des ensembles et de la théorie des catégories sont à la source de nombreux débats. Par exemple, la définition de la notion d'équivalence diffère dans les deux cadres. En théorie des ensembles, il est facile de montrer que deux entités sont identiques, car ces objets sont précisément définis.



La théorie des catégories considère comme identiques deux objets s'ils sont isomorphes

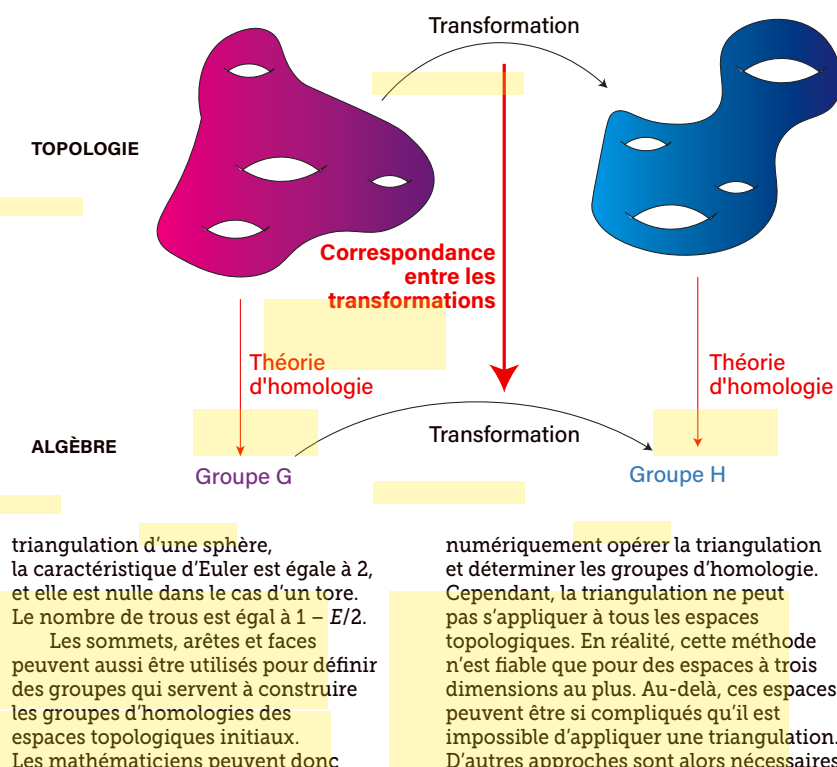
d'étudier ce qui se passe au voisinage d'un point dans l'espace, mais sans considérer la structure globale. Par exemple, il n'y a pas de différence lorsqu'on colle ensemble des fonctions sur une surface cylindrique ou un ruban de Möbius. Or en topologie, on insiste sur les propriétés globales de l'espace – auquel cas le ruban de Möbius et le cylindre diffèrent fondamentalement. Dès lors, au milieu des années 1950, les mathématiciens cherchaient une théorie des faisceaux homologique qui expliquerait comment les caractéristiques globales d'un espace sont reliées à des objets algébriques définis dans cet espace.

Eilenberg pensait également qu'il devait exister une théorie des faisceaux homologique. Mais ni lui ni ses collègues ne parvenaient à en construire une. Seul Grothendieck trouva une solution, en prenant un détour et en considérant d'abord les catégories. Contrairement à Mac Lane et Eilenberg, qui utilisaient les catégories pour résoudre des problèmes particuliers, Grothendieck avait un objectif plus

HOMOLOGIES ET TRIANGULATION

Un groupe d'homologie est un type de groupe que l'on associe à un espace topologique, car les nombres caractéristiques de ce groupe sont des invariants topologiques de l'espace correspondant. Les mathématiciens ne connaissent pas de méthode générale pour déterminer le groupe d'homologie d'un espace topologique arbitraire, ils l'obtiennent dans des cas particuliers.

Un exemple est celui de la triangulation. Dans le cas d'espaces topologiques simples, par exemple une sphère ou un tore, il est possible de couvrir la surface avec un maillage triangulaire. La surface qui était lisse devient alors un polyèdre avec des sommets, des arêtes et des faces. Or, en 1750, Leonhard Euler avait établi une relation simple donnant le nombre de trous de n'importe quel polyèdre. Ainsi, le nombre de sommets S moins le nombre d'arêtes A plus le nombre de faces F est un invariant topologique de la triangulation, nommé « caractéristique d'Euler » : $E = S - A + F$. Pour toute



En théorie des catégories, les choses se passent différemment, il n'y a pas «les» entiers naturels, mais plutôt «le concept» d'entiers naturels. Dès lors, du point de vue de la théorie des catégories, deux objets sont les mêmes s'ils sont «isomorphes», c'est-à-dire s'il existe une application (et son application réciproque) qui les connecte.

Cette différence est loin d'être anecdotique et a conduit en 2018 à un débat houleux autour d'une démonstration de la fameuse «conjecture ABC», que le Japonais Shinichi Mochizuki affirme avoir résolue. Sa preuve rendue publique en 2012 s'étend sur 500 pages, et s'appuie à son tour sur un deuxième article de près de 500 autres pages. Mais les mathématiciens ont beaucoup de mal à vérifier la preuve de Shinichi Mochizuki, tant son style et ses idées sont atypiques. En 2018, Jakob Stix, de l'université Goethe, à Francfort-sur-le-Main, en Allemagne, et Peter Scholze (lauréat d'une médaille Fields), de l'université de Bonn, ont suggéré qu'ils avaient trouvé une faille dans le raisonnement du Japonais. La contradiction émerge à une étape où il faut traiter comme équivalents ou non deux objets isomorphes. Pour Shinichi Mochizuki, il faut les distinguer, point sur lequel les deux mathématiciens allemands ne sont pas d'accord. La question n'est pas encore tranchée...

Pendant ce temps, de nombreux scientifiques exportent la théorie des catégories vers d'autres disciplines. Elle pourrait aider à mieux comprendre certains systèmes complexes. Par exemple, des physiciens de la matière condensée ont utilisé la théorie des catégories pour décrire

des états exotiques de la matière récemment découverts, les phases topologiques. Les informaticiens, eux, utilisent ces concepts abstraits pour développer de nouveaux langages de programmation, notamment celui nommé Haskell, qui devraient être plus robustes vis-à-vis des erreurs. En s'appuyant sur la théorie des catégories, des biologistes décrivent l'action des enzymes dans des réseaux métaboliques. Des chimistes l'appliquent à l'étude de réactions complexes faisant intervenir de nombreuses molécules. Même les linguistes lui trouvent une utilité, pour détecter des similarités grammaticales entre différentes langues.

UN PONT ENTRE DISCIPLINES

La théorie des catégories a aussi l'intérêt de rapprocher des chercheurs de différentes disciplines. De la même façon qu'elle a mis en contact les algébristes et les topologues, elle œuvre à présent de façon transdisciplinaire – à condition que les chercheurs aient envie d'apprendre un formalisme étrange et abstrait... Mais cela peut être bénéfique sur le long terme, comme l'a découvert l'informaticien Thorsten Altenkirch, de l'université de Nottingham. «Quand j'ai entendu parler de la théorie des catégories d'ordre supérieur, j'ai eu un réflexe de recul: qui pouvait inventer une chose pareille?, se rappelle-t-il. Et en fait, c'était exactement ce dont j'avais besoin.» Dans certains domaines scientifiques, le niveau d'abstraction de la théorie des catégories est devenu crucial, voire indispensable, pour résoudre des problèmes complexes. ■

BIBLIOGRAPHIE

T. D. Bradley, **What is applied category theory ?**, prépublication arXiv, 2018 (<https://arxiv.org/abs/1809.05923>).

J. Malgoire, **Grothendieck : un héritage mathématique fertile**, *Pour la Science*, n° 467, pp. 30-37, septembre 2016.

D. I. Spivak, **Category Theory for the Sciences**, MIT Press, 2014.

J. C. Baez et M. Stay, **Physics, topology, logic and computation : A Rosetta stone**, dans *New Structures for Physics* (sous la dir. de B. Coecke), Springer, pp. 95-172, 2011.

J. P. Marquis, **From a Geometrical Point of View**, Springer, 2009.

L'ESSENTIEL

> D'après la théorie des catégories, un objet mathématique est entièrement caractérisé par ses relations à des objets similaires.

> Dans le cas d'un espace topologique, on définit le groupoïde fondamental associé, une catégorie contenant les points et tous les chemins que l'on peut tracer entre deux points dans cet espace.

> Mais les points et les chemins sont des objets de dimensions 0 et 1. Pour sonder des espaces de plus haute dimension, les mathématiciens ont généralisé la notion de groupoïde fondamental à des dimensions infinies.

> Ces nouveaux objets révéleront peut-être de nouvelles pistes pour résoudre les grands problèmes mathématiques du XXI^e siècle.

L'AUTRICE



EMILY RIEHL
mathématicienne
à l'université
Johns-Hopkins,
à Baltimore,
aux États-Unis

Des catégories à l'infini

La théorie des catégories est un outil puissant pour révéler des liens cachés entre objets mathématiques très différents. En généralisant cette approche à des dimensions infinies, les chercheurs créent de nouvelles connexions utiles entre des concepts toujours plus complexes.

Une belle journée d'automne, alors que j'étais une jeune étudiante en mathématiques à l'université Harvard, je marchais le long de l'entrée du métro quand une scène étonnante a attiré mon regard. Un homme se tenait à côté d'un mur sur lequel il avait griffonné quelques énigmes mathématiques. L'une d'elles consistait à demander s'il était possible de construire géométriquement, avec une simple règle (non graduée) et un compas, un cube dont le volume serait exactement le double d'un autre cube donné.

Je connaissais ce problème, qui est en fait très ancien: le philosophe grec Plutarque l'attribuait déjà à Platon il y a plus de deux mille ans. La règle permet de prolonger un segment et le compas permet de dessiner un cercle de n'importe quel rayon autour d'un point donné. Le point clé de cette énigme est que les points et les longueurs du dessin final doivent être présents au départ, ou

constructibles avec les deux outils du géomètre à partir de la figure initiale.

Pour doubler le volume d'un cube, on commence par une arête de ce cube. Prenons-la comme unité de mesure. Le volume de ce cube initial est donc $1^3 = 1$. Pour construire le cube désiré, il faut trouver un moyen de construire un segment de longueur $\sqrt[3]{2}$ (la racine cubique de 2) à la règle et au compas: un cube ayant ce segment pour arête aura alors un volume égal à 2.

C'est un problème difficile. Si difficile que, depuis qu'il a été énoncé, personne n'a réussi à le résoudre. En fait, en 1837, le mathématicien français Pierre-Laurent Wantzel a démontré l'impossibilité de trouver une solution. Sa preuve s'appuie sur des notions mathématiques très modernes à son époque, dont les fondements ont été développés par un de ses contemporains, Évariste Galois, un prodige des mathématiques mort à vingt ans lors d'un duel (peut-être lié à une affaire de cœur). Au même âge, je n'avais, pour ma part, rien accompli