

L'ESSENTIEL

> D'après la théorie des catégories, un objet mathématique est entièrement caractérisé par ses relations à des objets similaires.

> Dans le cas d'un espace topologique, on définit le groupoïde fondamental associé, une catégorie contenant les points et tous les chemins que l'on peut tracer entre deux points dans cet espace.

> Mais les points et les chemins sont des objets de dimensions 0 et 1. Pour sonder des espaces de plus haute dimension, les mathématiciens ont généralisé la notion de groupoïde fondamental à des dimensions infinies.

> Ces nouveaux objets révéleront peut-être de nouvelles pistes pour résoudre les grands problèmes mathématiques du XXI^e siècle.

L'AUTRICE



EMILY RIEHL
mathématicienne
à l'université
Johns-Hopkins,
à Baltimore,
aux États-Unis

Des catégories à l'infini

La théorie des catégories est un outil puissant pour révéler des liens cachés entre objets mathématiques très différents. En généralisant cette approche à des dimensions infinies, les chercheurs créent de nouvelles connexions utiles entre des concepts toujours plus complexes.

Une belle journée d'automne, alors que j'étais une jeune étudiante en mathématiques à l'université Harvard, je marchais le long de l'entrée du métro quand une scène étonnante a attiré mon regard. Un homme se tenait à côté d'un mur sur lequel il avait griffonné quelques énigmes mathématiques. L'une d'elles consistait à demander s'il était possible de construire géométriquement, avec une simple règle (non graduée) et un compas, un cube dont le volume serait exactement le double d'un autre cube donné.

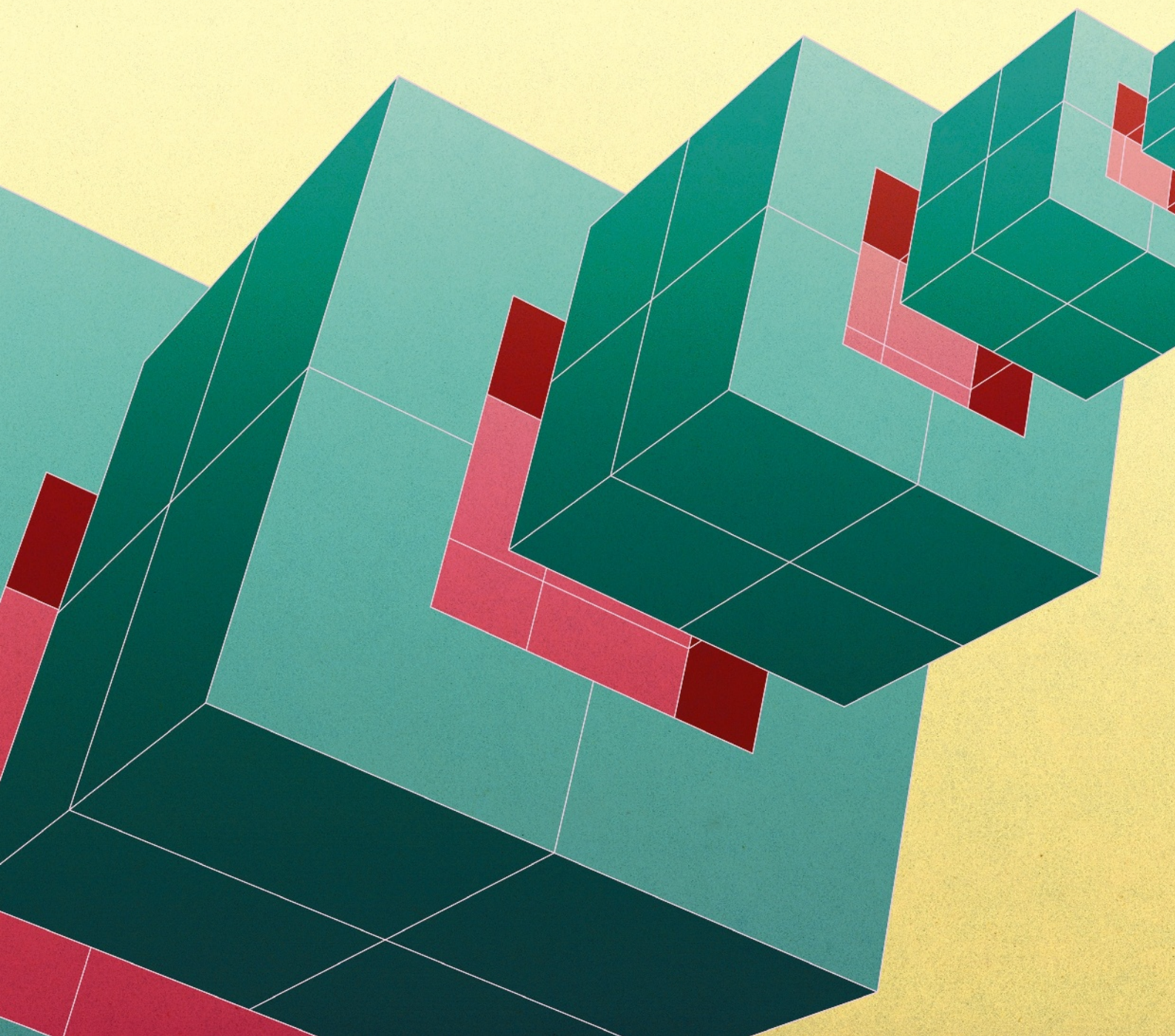
Je connaissais ce problème, qui est en fait très ancien: le philosophe grec Plutarque l'attribuait déjà à Platon il y a plus de deux mille ans. La règle permet de prolonger un segment et le compas permet de dessiner un cercle de n'importe quel rayon autour d'un point donné. Le point clé de cette énigme est que les points et les longueurs du dessin final doivent être présents au départ, ou

constructibles avec les deux outils du géomètre à partir de la figure initiale.

Pour doubler le volume d'un cube, on commence par une arête de ce cube. Prenons-la comme unité de mesure. Le volume de ce cube initial est donc $1^3 = 1$. Pour construire le cube désiré, il faut trouver un moyen de construire un segment de longueur $\sqrt[3]{2}$ (la racine cubique de 2) à la règle et au compas: un cube ayant ce segment pour arête aura alors un volume égal à 2.

C'est un problème difficile. Si difficile que, depuis qu'il a été énoncé, personne n'a réussi à le résoudre. En fait, en 1837, le mathématicien français Pierre-Laurent Wantzel a démontré l'impossibilité de trouver une solution. Sa preuve s'appuie sur des notions mathématiques très modernes à son époque, dont les fondements ont été développés par un de ses contemporains, Évariste Galois, un prodige des mathématiques mort à vingt ans lors d'un duel (peut-être lié à une affaire de cœur). Au même âge, je n'avais, pour ma part, rien accompli

En généralisant les principes
de la théorie des catégories
à des dimensions supérieures,
les chercheurs espèrent découvrir
de nouvelles connexions entre des
objets mathématiques éloignés.



d'aussi impressionnant en mathématiques, mais au moins je comprenais la démonstration de Wantzel.

L'idée est la suivante : étant donné un point choisi pour origine et un segment de longueur unité, il est assez simple de construire, à la règle et au compas, tous les points d'une droite dont la distance à l'origine est un nombre rationnel (c'est-à-dire un nombre qui s'exprime comme le rapport de deux nombres entiers).

UNE QUESTION DE CONSTRUCTIBILITÉ

Plus généralement, Wantzel a prouvé que les coordonnées d'un nouveau point construit seulement avec ces deux outils sont forcément solutions d'une équation polynomiale quadratique (ou du deuxième degré), $ax^2+bx+c=0$, où a , b et c font partie des nombres déjà construits. On peut donc construire des nombres comme $\sqrt{2}$, qui est solution de $x^2-2=0$. En revanche, $\sqrt[3]{2}$ est impossible à obtenir ainsi, car cette valeur est solution d'un polynôme cubique, $x^3-2=0$; or la théorie de Galois, qui utilise la notion d'«extension d'un corps», démontre qu'il est impossible d'obtenir une solution d'un polynôme cubique irréductible en ne s'autorisant qu'à prendre les solutions de polynômes quadratiques.

Galois a en effet travaillé sur la notion de corps, une structure algébrique fondamentale constituée d'un ensemble – par exemple un ensemble de nombres, tel celui des nombres rationnels ou celui des nombres réels – et munie de deux opérations, l'addition et la multiplication (on y définit aussi les opposés et les

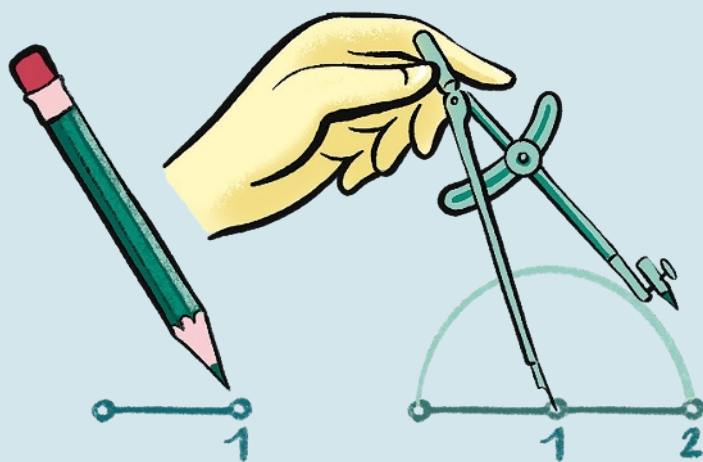
inverses, respectivement pour la soustraction et la division). En multipliant ou en additionnant deux éléments d'un corps, on retrouve un nouvel élément du corps.

En ajoutant un nouvel élément extérieur à un corps, et en le combinant avec tous les éléments déjà à disposition grâce aux deux opérations, on peut obtenir un nouveau corps, une «extension de corps». On retrouve ce procédé d'extension dans les nombres constructibles à la règle et au compas : de nouvelles constructions donnent accès à de nouveaux nombres apparaissant dans les coordonnées des points construits. La théorie de Galois associe à chaque extension de corps un entier strictement positif, nommé «degré» et lié au degré des polynômes dont on a extrait des racines pour ajouter ces nouveaux nombres au corps initial. Dans ce cadre, on montre qu'on ne peut pas construire, à la règle et au compas, des nombres qui sont seulement solutions de polynômes cubiques.

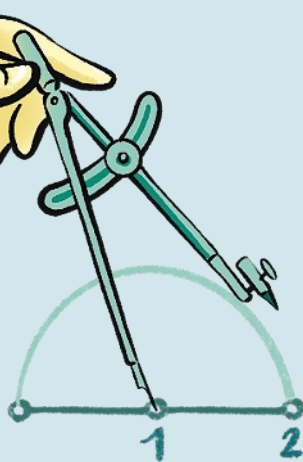
Connaissant toutes les subtilités qui se cachent derrière ce problème antique, j'ai entamé une discussion avec la personne qui avait dessiné l'énigme sur le mur. Comme on pouvait s'y attendre, ma tentative d'expliquer pourquoi le problème était insoluble a été un échec. Pour toute réponse, l'homme m'a assuré que mes études m'avaient formatée et m'empêchaient de penser «en dehors des sentiers battus».

Mais une question a émergé de cette rencontre : comment une étudiante en troisième année avait-elle été capable d'apprendre en quelques semaines des théories aussi abstraites que celle de Galois sur les extensions

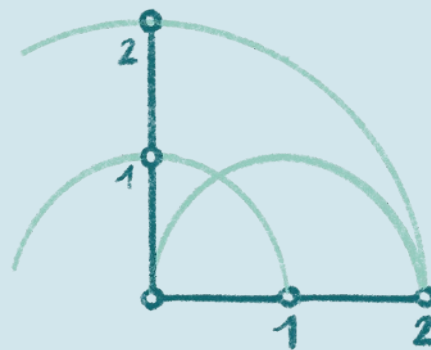
LES NOMBRES RATIONNELS CONSTRUITS À LA RÈGLE ET AU COMPAS



Étape 1 : On utilise le compas pour définir une longueur égale à 1 sur un axe horizontal.



Étape 2 : Avec le même écartement du compas, on obtient un segment de longueur 2.



Étape 3 : On construit au compas un axe vertical passant par l'origine, puis l'on y marque les distances 1, 2 et 3.