

d'aussi impressionnant en mathématiques, mais au moins je comprenais la démonstration de Wantzel.

L'idée est la suivante : étant donné un point choisi pour origine et un segment de longueur unité, il est assez simple de construire, à la règle et au compas, tous les points d'une droite dont la distance à l'origine est un nombre rationnel (c'est-à-dire un nombre qui s'exprime comme le rapport de deux nombres entiers).

UNE QUESTION DE CONSTRUCTIBILITÉ

Plus généralement, Wantzel a prouvé que les coordonnées d'un nouveau point construit seulement avec ces deux outils sont forcément solutions d'une équation polynomiale quadratique (ou du deuxième degré), $ax^2+bx+c=0$, où a , b et c font partie des nombres déjà construits. On peut donc construire des nombres comme $\sqrt{2}$, qui est solution de $x^2-2=0$. En revanche, $\sqrt[3]{2}$ est impossible à obtenir ainsi, car cette valeur est solution d'un polynôme cubique, $x^3-2=0$; or la théorie de Galois, qui utilise la notion d'«extension d'un corps», démontre qu'il est impossible d'obtenir une solution d'un polynôme cubique irréductible en ne s'autorisant qu'à prendre les solutions de polynômes quadratiques.

Galois a en effet travaillé sur la notion de corps, une structure algébrique fondamentale constituée d'un ensemble – par exemple un ensemble de nombres, tel celui des nombres rationnels ou celui des nombres réels – et munie de deux opérations, l'addition et la multiplication (on y définit aussi les opposés et les

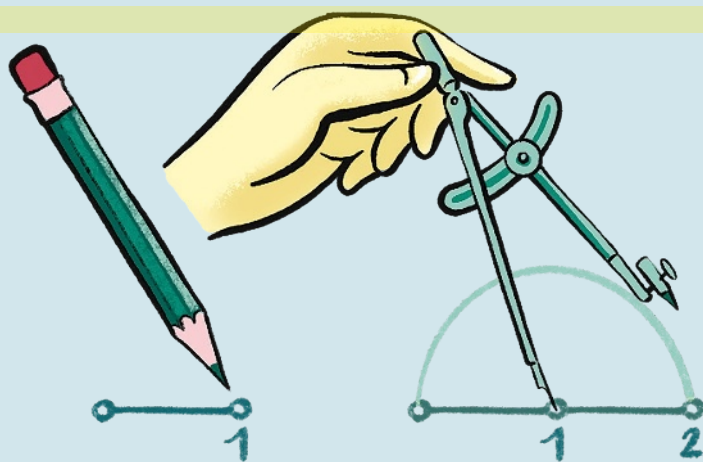
inverses, respectivement pour la soustraction et la division). En multipliant ou en additionnant deux éléments d'un corps, on retrouve un nouvel élément du corps.

En ajoutant un nouvel élément extérieur à un corps, et en le combinant avec tous les éléments déjà à disposition grâce aux deux opérations, on peut obtenir un nouveau corps, une «extension de corps». On retrouve ce procédé d'extension dans les nombres constructibles à la règle et au compas : de nouvelles constructions donnent accès à de nouveaux nombres apparaissant dans les coordonnées des points construits. La théorie de Galois associe à chaque extension de corps un entier strictement positif, nommé «degré» et lié au degré des polynômes dont on a extrait des racines pour ajouter ces nouveaux nombres au corps initial. Dans ce cadre, on montre qu'on ne peut pas construire, à la règle et au compas, des nombres qui sont seulement solutions de polynômes cubiques.

Connaissant toutes les subtilités qui se cachent derrière ce problème antique, j'ai entamé une discussion avec la personne qui avait dessiné l'énigme sur le mur. Comme on pouvait s'y attendre, ma tentative d'expliquer pourquoi le problème était insoluble a été un échec. Pour toute réponse, l'homme m'a assuré que mes études m'avaient formée et m'empêchaient de penser «en dehors des sentiers battus».

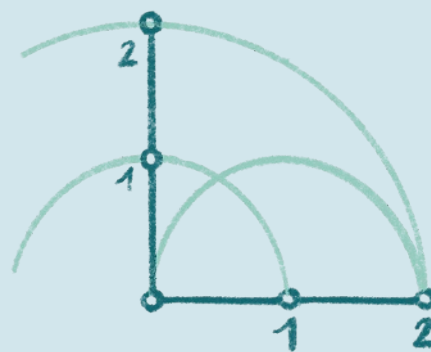
Mais une question a émergé de cette rencontre : comment une étudiante en troisième année avait-elle été capable d'apprendre en quelques semaines des théories aussi abstraites que celle de Galois sur les extensions

LES NOMBRES RATIONNELS CONSTRUITS À LA RÈGLE ET AU COMPAS



Étape 1 : On utilise le compas pour définir une longueur égale à 1 sur un axe horizontal.

Étape 2 : Avec le même écartement du compas, on obtient un segment de longueur 2.



Étape 3 : On construit au compas un axe vertical passant par l'origine, puis l'on y marque les distances 1, 2 et 3.