

d'aussi impressionnant en mathématiques, mais au moins je comprenais la démonstration de Wantzel.

L'idée est la suivante : étant donné un point choisi pour origine et un segment de longueur unité, il est assez simple de construire, à la règle et au compas, tous les points d'une droite dont la distance à l'origine est un nombre rationnel (c'est-à-dire un nombre qui s'exprime comme le rapport de deux nombres entiers).

UNE QUESTION DE CONSTRUCTIBILITÉ

Plus généralement, Wantzel a prouvé que les coordonnées d'un nouveau point construit seulement avec ces deux outils sont forcément solutions d'une équation polynomiale quadratique (ou du deuxième degré), $ax^2+bx+c=0$, où a , b et c font partie des nombres déjà construits. On peut donc construire des nombres comme $\sqrt{2}$, qui est solution de $x^2-2=0$. En revanche, $\sqrt[3]{2}$ est impossible à obtenir ainsi, car cette valeur est solution d'un polynôme cubique, $x^3-2=0$; or la théorie de Galois, qui utilise la notion d'«extension d'un corps», démontre qu'il est impossible d'obtenir une solution d'un polynôme cubique irréductible en ne s'autorisant qu'à prendre les solutions de polynômes quadratiques.

Galois a en effet travaillé sur la notion de corps, une structure algébrique fondamentale constituée d'un ensemble – par exemple un ensemble de nombres, tel celui des nombres rationnels ou celui des nombres réels – et munie de deux opérations, l'addition et la multiplication (on y définit aussi les opposés et les

inverses, respectivement pour la soustraction et la division). En multipliant ou en additionnant deux éléments d'un corps, on retrouve un nouvel élément du corps.

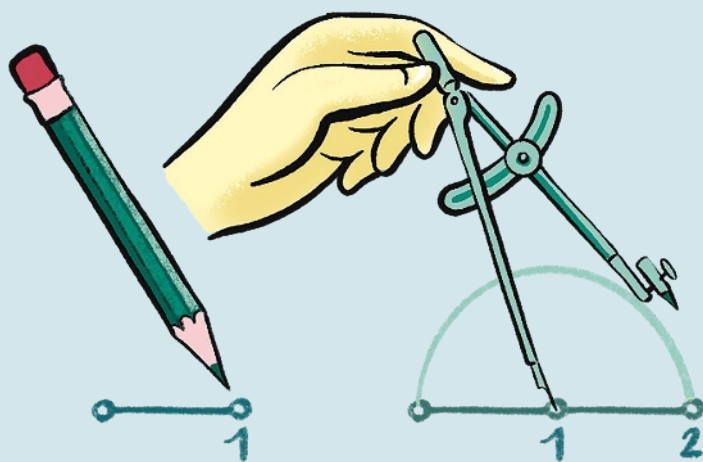
En ajoutant un nouvel élément extérieur à un corps, et en le combinant avec tous les éléments déjà à disposition grâce aux deux opérations, on peut obtenir un nouveau corps, une «extension de corps». On retrouve ce procédé d'extension dans les nombres constructibles à la règle et au compas : de nouvelles constructions donnent accès à de nouveaux nombres apparaissant dans les coordonnées des points construits. La théorie de Galois associe à chaque extension de corps un entier strictement positif, nommé «degré» et lié au degré des polynômes dont on a extrait des racines pour ajouter ces nouveaux nombres au corps initial. Dans ce cadre, on montre qu'on ne peut pas construire, à la règle et au compas, des nombres qui sont seulement solutions de polynômes cubiques.

Connaissant toutes les subtilités qui se cachent derrière ce problème antique, j'ai entamé une discussion avec la personne qui avait dessiné l'énigme sur le mur. Comme on pouvait s'y attendre, ma tentative d'expliquer pourquoi le problème était insoluble a été un échec. Pour toute réponse, l'homme m'a assuré que mes études m'avaient formatée et m'empêchaient de penser «en dehors des sentiers battus».

Mais une question a émergé de cette rencontre : comment une étudiante en troisième année avait-elle été capable d'apprendre en quelques semaines des théories aussi abstraites que celle de Galois sur les extensions

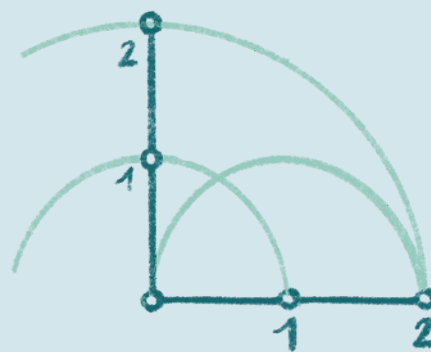
Sauf mention contraire tous les dessins sont de Matteo Farinella

LES NOMBRES RATIONNELS CONSTRUITS À LA RÈGLE ET AU COMPAS



Étape 1 : On utilise le compas pour définir une longueur égale à 1 sur un axe horizontal.

Étape 2 : Avec le même écartement du compas, on obtient un segment de longueur 2.



Étape 3 : On construit au compas un axe vertical passant par l'origine, puis l'on y marque les distances 1, 2 et 3.

de corps? Plus généralement, tous les concepts que nous manipulons dans notre discipline ont été construits au cours du temps par des géants des mathématiques qui se sont juchés les uns après les autres sur les épaules de leurs prédécesseurs. Aujourd'hui, la richesse des mathématiques modernes donnerait le tournis à Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Leonhard Euler ou encore Carl Friedrich Gauss. Comment les mathématiciens font-ils pour absorber aussi rapidement des siècles de savoirs patiemment développés?

PRENDRE DE LA HAUTEUR

Une partie de la réponse se trouve dans une théorie née au xx^e siècle: la théorie des catégories. Grâce à un certain niveau d'abstraction, celle-ci donne une sorte de «vue d'ensemble» des mathématiques. En s'intéressant, dans le sens le plus général possible, aux structures mathématiques et à leurs relations, cette théorie permet de considérer que deux objets mathématiques *a priori* distincts sont, d'une certaine façon, «les mêmes», parce qu'ils se comportent de la même manière vis-à-vis des autres objets.

En effet, le théorème fondamental de la théorie des catégories (le lemme de Yoneda) nous dit que tout objet mathématique, qu'il soit simple ou très complexe, est entièrement caractérisé par ses relations avec les autres objets de sa famille: il existe donc un unique objet entretenant précisément ces relations-là avec les autres objets. Grâce à la théorie des catégories, les mathématiciens peuvent donc aborder de nouvelles idées en démontrant des règles générales qui s'appliquent à un large

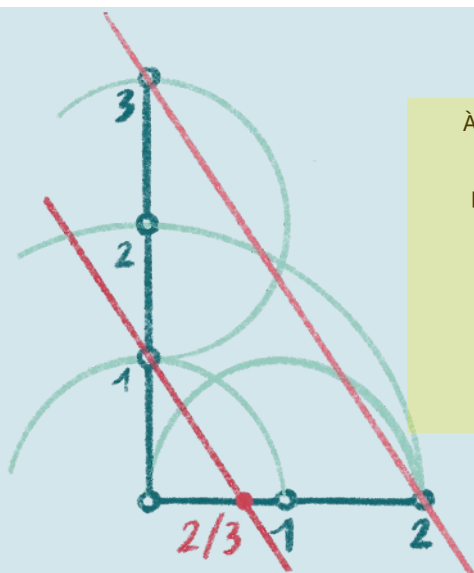
Tous les concepts ont été construits par des géants des mathématiques qui se sont juchés les uns après les autres sur les épaules de leurs prédécesseurs

spectre d'objets, sans être obligés de considérer à chaque fois les lois spécifiques du domaine particulier considéré.

Depuis sa naissance, il y a près de soixante-dix ans, la théorie des catégories a fait ses preuves et a démontré son utilité à découvrir des pistes originales pour résoudre certaines grandes conjectures. Cependant, alors que les mathématiques continuent d'évoluer, les chercheurs dans ce domaine ont eu le sentiment que l'idée que deux objets sont «les mêmes» a elle aussi évolué. Depuis une vingtaine d'années, de nombreux mathématiciens, dont je fais partie, ont travaillé sur une version étendue de la théorie des catégories capable de prendre en compte une notion généralisée de l'unicité d'un objet défini par ses relations.

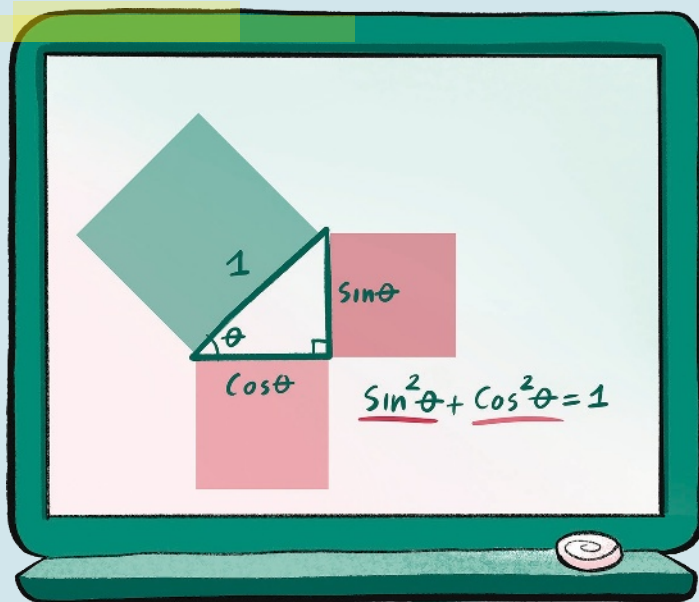
Ces nouvelles catégories, les «infini-catégories» (on écrit parfois « ∞ -catégories»), élargissent le champ de la théorie. Le langage des infini-catégories offre des outils puissants pour étudier des problèmes où les relations entre objets sont trop subtiles pour être analysées à l'aide la théorie des catégories classique. Cette «prise de recul à l'infini» offre une nouvelle façon de voir et penser les anciens concepts mathématiques, tout en ouvrant de nouvelles perspectives.

Comme de nombreux mathématiciens que je connais, j'ai été attirée par la théorie des catégories en partie parce que j'avais une mauvaise mémoire. Cela a tendance à surprendre mes interlocuteurs, qui se souviennent des mathématiques à l'école comme une longue liste de relations à apprendre par cœur, les



Étape 4: On relie le point 2 de l'axe horizontal et le point 3 de l'axe vertical par une droite. À l'aide du compas, on construit une droite perpendiculaire à celle-ci passant par l'origine, puis une droite perpendiculaire à cette dernière passant par le point 1 sur l'axe vertical. Cette dernière coupe l'axe horizontal au point $2/3$. Cette méthode permet de construire tous les nombres rationnels.

LE THÉORÈME DE PYTHAGORE



formules trigonométriques par exemple. Mais j'avais très tôt compris que la plupart des formules trigonométriques les plus utilisées peuvent se retrouver à partir d'une seule relation, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, qui a elle-même une explication très élégante : c'est le théorème de Pythagore appliqué à un triangle rectangle dont l'hypoténuse est de longueur 1 et qui a un angle aigu égal à θ .

Cette vision utopique des mathématiques où tout s'explique et rien ne doit être mémorisé est mise à mal quand on arrive à l'université. À cette étape de leur parcours, les étudiants se retrouvent confrontés à une avalanche de concepts à maîtriser et qui ont été inventés au cours des derniers siècles.

UNE AVALANCHE DE CONCEPTS

Par exemple, les «groupes», «anneaux» et «corps» appartiennent au domaine de l'algèbre, un mot dérivé du titre d'un livre écrit au IX^e siècle par le mathématicien et astronome persan Muhammad Ibn Mūsā al-Khwarizmi, parfois traduit en *Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison*. Au cours du millénaire qui a suivi, l'algèbre s'est fortement développée : alors qu'elle consistait initialement à étudier les solutions d'équations polynomiales, elle a fini par se préoccuper de systèmes de nombres plus abstraits.

Par exemple, puisque aucun nombre réel x ne vérifie l'équation $x^2 + 1 = 0$, les mathématiciens ont construit un nouveau système de nombres – aujourd'hui connus sous le nom de «nombres complexes» – en ajoutant un nombre imaginaire noté i et en imposant l'égalité $i^2 + 1 = 0$.

L'algèbre n'est que l'une des disciplines du cursus d'un étudiant en mathématiques. Parmi les autres sujets importants, on trouve la topologie (l'étude abstraite de l'espace) et l'analyse,

qui a commencé par la formalisation rigoureuse de l'étude des fonctions réelles avant de s'aventurer sur des terrains plus exotiques comme les espaces probabilisés, les variables aléatoires, les variétés complexes, les fonctions holomorphes... Comment un étudiant est-il censé comprendre tout cela en même temps ?

Il existe, en mathématiques, un phénomène assez paradoxal : celui de la simplification par l'abstraction. Comme l'a écrit la mathématicienne britannique Eugenia Cheng dans son ouvrage *The Art of Logic in an Illogical World*, «une propriété puissante de l'abstraction est que de nombreuses situations *a priori* différentes deviennent les mêmes lorsqu'on omet certains détails.»

L'algèbre moderne est née au début du XX^e siècle, lorsque les mathématiciens ont décidé de définir un cadre qui unifie les nombreux exemples de structures algébriques apparaissant dans l'étude des solutions d'équations polynomiales ou dans celle des configurations de figures géométriques dans le plan. Pour relier les études de ces différentes structures, les chercheurs ont identifié les axiomes fondamentaux qui décrivent leurs propriétés communes. C'est donc pour dépasser un simple empilement d'exemples ou de constructions particulières que les groupes, anneaux et corps ont été définis et intégrés à l'univers des mathématiques, en même temps que l'idée selon laquelle un objet mathématique peut être décrit par ses propriétés, et compris de façon abstraite.

Le mathématicien britannique John Conway, disparu récemment, a beaucoup médité et écrit sur l'ontologie singulière des objets mathématiques : «Il n'y a aucun doute qu'ils existent, mais on ne peut les examiner minutieusement que par la pensée. C'est assez étonnant, et je ne le comprends toujours pas, bien qu'ayant été mathématicien toute ma vie. Comment des choses peuvent-elles être là sans réellement être là?»

Mais cet univers d'objets mathématiques qui peuvent exister sans réellement être là a engendré un problème : un tel monde est nettement trop vaste pour qu'un être humain puisse le comprendre. Même en se restreignant à l'algèbre, il y a tout simplement beaucoup trop d'objets mathématiques pour qu'on ait le temps de tous les étudier. Au tournant du XX^e siècle, les mathématiciens ont commencé à étudier ce qu'on nomme l'«algèbre universelle». Elle se fonde sur un ensemble abstrait (qui peut représenter, par exemple, une collection de symétries, ou de nombres dans un certain système), associée à diverses opérations entre les éléments de cet ensemble (comme l'addition ou la multiplication dans le cas du corps déjà évoqué) et satisfaisant une liste d'axiomes naturels tels que l'associativité, la commutativité ou la distributivité.