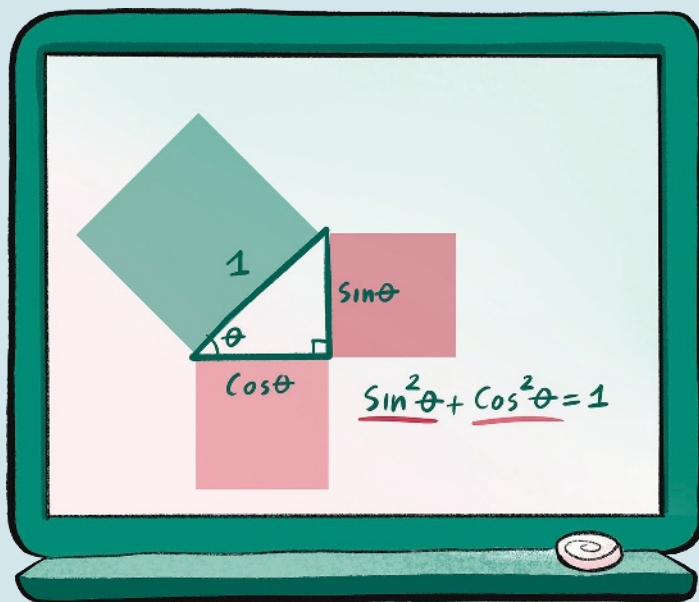




formules trigonométriques par exemple. Mais j'avais très tôt compris que la plupart des formules trigonométriques les plus utilisées peuvent se retrouver à partir d'une seule relation, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, qui a elle-même une explication très élégante : c'est le théorème de Pythagore appliqué à un triangle rectangle dont l'hypoténuse est de longueur 1 et qui a un angle aigu égal à θ .

Cette vision utopique des mathématiques où tout s'explique et rien ne doit être mémorisé est mise à mal quand on arrive à l'université. À cette étape de leur parcours, les étudiants se retrouvent confrontés à une avalanche de concepts à maîtriser et qui ont été inventés au cours des derniers siècles.

UNE AVALANCHE DE CONCEPTS

Par exemple, les «groupes», «anneaux» et «corps» appartiennent au domaine de l'algèbre, un mot dérivé du titre d'un livre écrit au IX^e siècle par le mathématicien et astronome persan Muhammad Ibn Mūsā al-Khwarizmi, parfois traduit en *Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison*. Au cours du millénaire qui a suivi, l'algèbre s'est fortement développée : alors qu'elle consistait initialement à étudier les solutions d'équations polynomiales, elle a fini par se préoccuper de systèmes de nombres plus abstraits.

Par exemple, puisque aucun nombre réel x ne vérifie l'équation $x^2 + 1 = 0$, les mathématiciens ont construit un nouveau système de nombres – aujourd'hui connus sous le nom de «nombres complexes» – en ajoutant un nombre imaginaire noté i et en imposant l'égalité $i^2 + 1 = 0$.

L'algèbre n'est que l'une des disciplines du cursus d'un étudiant en mathématiques. Parmi les autres sujets importants, on trouve la topologie (l'étude abstraite de l'espace) et l'analyse,

qui a commencé par la formalisation rigoureuse de l'étude des fonctions réelles avant de s'aventurer sur des terrains plus exotiques comme les espaces probabilisés, les variables aléatoires, les variétés complexes, les fonctions holomorphes... Comment un étudiant est-il censé comprendre tout cela en même temps ?

Il existe, en mathématiques, un phénomène assez paradoxal : celui de la simplification par l'abstraction. Comme l'a écrit la mathématicienne britannique Eugenia Cheng dans son ouvrage *The Art of Logic in an Illogical World*, «une propriété puissante de l'abstraction est que de nombreuses situations *a priori* différentes deviennent les mêmes lorsqu'on omet certains détails.»

L'algèbre moderne est née au début du XX^e siècle, lorsque les mathématiciens ont décidé de définir un cadre qui unifie les nombreux exemples de structures algébriques apparaissant dans l'étude des solutions d'équations polynomiales ou dans celle des configurations de figures géométriques dans le plan. Pour relier les études de ces différentes structures, les chercheurs ont identifié les axiomes fondamentaux qui décrivent leurs propriétés communes. C'est donc pour dépasser un simple empilement d'exemples ou de constructions particulières que les groupes, anneaux et corps ont été définis et intégrés à l'univers des mathématiques, en même temps que l'idée selon laquelle un objet mathématique peut être décrit par ses propriétés, et compris de façon abstraite.

Le mathématicien britannique John Conway, disparu récemment, a beaucoup médité et écrit sur l'ontologie singulière des objets mathématiques : «Il n'y a aucun doute qu'ils existent, mais on ne peut les examiner minutieusement que par la pensée. C'est assez étonnant, et je ne le comprends toujours pas, bien qu'ayant été mathématicien toute ma vie. Comment des choses peuvent-elles être là sans réellement être là?»

Mais cet univers d'objets mathématiques qui peuvent exister sans réellement être là a engendré un problème : un tel monde est nettement trop vaste pour qu'un être humain puisse le comprendre. Même en se restreignant à l'algèbre, il y a tout simplement beaucoup trop d'objets mathématiques pour qu'on ait le temps de tous les étudier. Au tournant du XX^e siècle, les mathématiciens ont commencé à étudier ce qu'on nomme l'«algèbre universelle». Elle se fonde sur un ensemble abstrait (qui peut représenter, par exemple, une collection de symétries, ou de nombres dans un certain système), associée à diverses opérations entre les éléments de cet ensemble (comme l'addition ou la multiplication dans le cas du corps déjà évoqué) et satisfaisant une liste d'axiomes naturels tels que l'associativité, la commutativité ou la distributivité.

Une fois ce cadre général posé, en faisant différents choix – l'opération est-elle définie seulement sur certains éléments ou sur tous? Est-elle inversible? –, on retrouve, selon les cas, les diverses structures algébriques usuelles, notamment les groupes, anneaux et corps. Mais l'algèbre universelle n'est pas restreinte à ces choix, qui ne représentent qu'une infime partie d'un éventail infini de possibilités.

La prolifération de nouveaux objets mathématiques apporte sa propre complexité. Une façon de simplifier l'étude est d'introduire un niveau supplémentaire d'abstraction où, étonnamment, on peut démontrer des théorèmes s'appliquant simultanément à une grande variété d'objets mathématiques sans avoir à spécifier exactement de quels types d'objets on parle.

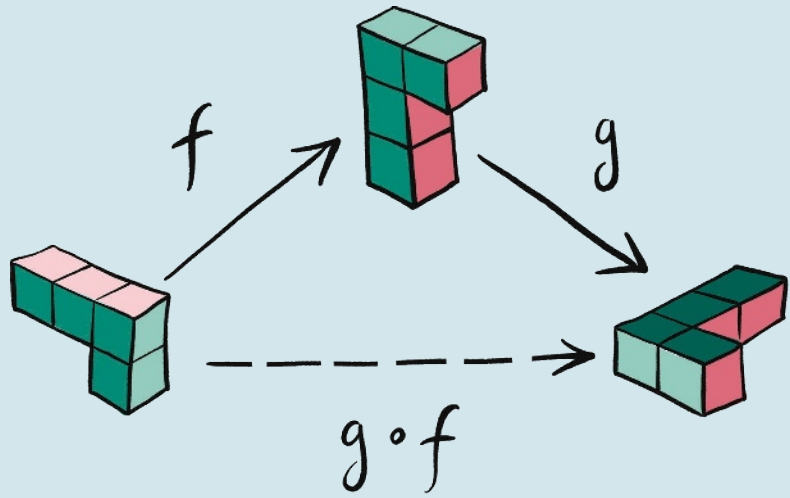
C'est précisément ce que fait la théorie des catégories, fondée dans les années 1940 par les mathématiciens américains Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane (voir l'article pages 30 à 37). Bien qu'elle ait été introduite à l'origine pour donner une définition rigoureuse de l'expression «équivalence naturelle», elle offre aussi un moyen de penser de façon universelle à l'algèbre universelle ainsi qu'à d'autres domaines des mathématiques. Dans le langage d'Eilenberg et de Mac Lane, on envisage maintenant chaque type d'objet mathématique comme faisant partie d'une catégorie, qui est une collection bien définie d'objets et de transformations entre ces objets, simplement représentées par des flèches (le terme technique pour les désigner est «morphismes» ou tout simplement «flèches»).

Par exemple, le domaine de l'algèbre linéaire consiste en l'étude des espaces vectoriels abstraits comme l'espace euclidien tridimensionnel (qui correspond à notre perception de l'espace physique). Dans la catégorie des espaces vectoriels, les transformations considérées se nomment «applications linéaires», et chacune d'elles a un espace de départ et un espace d'arrivée bien définis, indiquant quels types de vecteurs sont pris en entrée et quels types sont renvoyés par l'application.

D'UNE TRANSFORMATION À L'AUTRE

De plus, dans toute catégorie, les transformations peuvent, comme des fonctions classiques, être «composées», ce qui signifie qu'on peut appliquer une transformation au résultat d'une autre transformation. Pour toute paire de transformations, constituée de $f: A \rightarrow B$ (lire « f est une transformation de A vers B ») et $g: B \rightarrow C$, la catégorie indique une unique transformation composée, notée $g \circ f: A \rightarrow C$ (la «composée de f et g est une transformation de A vers C »). Notons que la composition n'est possible que si l'ensemble de départ de g est identique à l'ensemble d'arrivée de f .

COMPOSITION DE DEUX TRANSFORMATIONS



On ajoute l'axiome naturel selon lequel cette loi de composition doit être associative, ce qui signifie que si f , g et h sont des applications composables entre elles dans cet ordre, les deux façons de les composer successivement coïncident: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Enfin, cette loi doit être «unitaire»: chaque objet B possède une transformation nommée «identité», couramment notée 1_B («l'identité de B ») et ayant pour propriété fondamentale $g \circ 1_B = g$ et $1_B \circ f = f$, pour g et f des transformations dont, respectivement, l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée est B .

Alors que des collections de structures algébriques définies en algèbre universelle peuvent être distinctes les unes des autres, les catégories que ces objets habitent présentent des similarités que le langage des catégories permet d'exprimer précisément. Ainsi, ces similitudes, telles des analogies, relient entre eux certains concepts et réduisent énormément la quantité de notions nécessaires à comprendre, surtout dans certains domaines.

Avec suffisamment d'expérience, les mathématiciens savent en partie à quoi s'attendre lorsqu'ils rencontrent un nouveau type de structure algébrique. Cette idée se retrouve dans les manuels modernes d'algèbre, qui présentent successivement la théorie des groupes, celle des anneaux et celle des espaces vectoriels, essentiellement parce que ces théories sont semblables. Il existe d'autres analogies, plus lâches, entre ces catégories et celles que l'on rencontre en topologie ou en analyse, et ces similitudes facilitent l'absorption plus rapide de nouvelles connaissances.

Ces motifs répétés permettent alors d'appréhender rapidement de nouveaux objets et de consacrer ensuite plus de temps à explorer les questions particulières qui les distinguent – bien que les progrès de la recherche

LA LOI DE COMPOSITION EST ASSOCIATIVE ET UNITAIRE

