

Une fois ce cadre général posé, en faisant différents choix – l'opération est-elle définie seulement sur certains éléments ou sur tous? Est-elle inversible? –, on retrouve, selon les cas, les diverses structures algébriques usuelles, notamment les groupes, anneaux et corps. Mais l'algèbre universelle n'est pas restreinte à ces choix, qui ne représentent qu'une infime partie d'un éventail infini de possibilités.

La prolifération de nouveaux objets mathématiques apporte sa propre complexité. Une façon de simplifier l'étude est d'introduire un niveau supplémentaire d'abstraction où, étonnamment, on peut démontrer des théorèmes s'appliquant simultanément à une grande variété d'objets mathématiques sans avoir à spécifier exactement de quels types d'objets on parle.

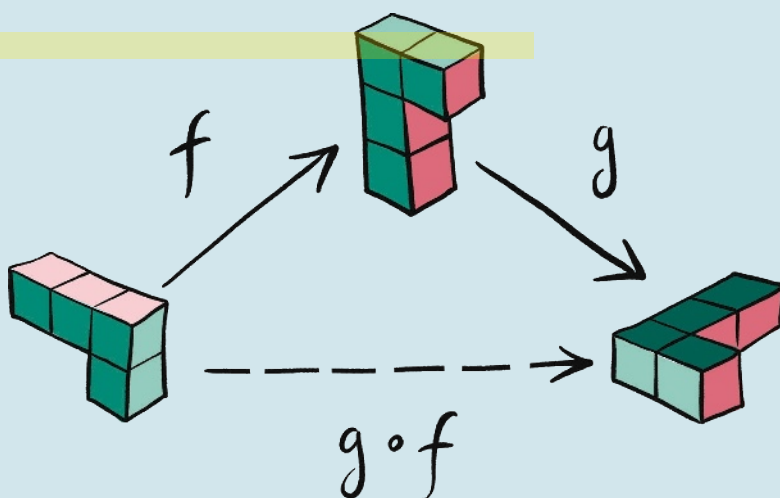
C'est précisément ce que fait la théorie des catégories, fondée dans les années 1940 par les mathématiciens américains Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane (voir l'article pages 30 à 37). Bien qu'elle ait été introduite à l'origine pour donner une définition rigoureuse de l'expression «équivalence naturelle», elle offre aussi un moyen de penser de façon universelle à l'algèbre universelle ainsi qu'à d'autres domaines des mathématiques. Dans le langage d'Eilenberg et de Mac Lane, on envisage maintenant chaque type d'objet mathématique comme faisant partie d'une catégorie, qui est une collection bien définie d'objets et de transformations entre ces objets, simplement représentées par des flèches (le terme technique pour les désigner est «morphisme» ou tout simplement «flèches»).

Par exemple, le domaine de l'algèbre linéaire consiste en l'étude des espaces vectoriels abstraits comme l'espace euclidien tridimensionnel (qui correspond à notre perception de l'espace physique). Dans la catégorie des espaces vectoriels, les transformations considérées se nomment «applications linéaires», et chacune d'elles a un espace de départ et un espace d'arrivée bien définis, indiquant quels types de vecteurs sont pris en entrée et quels types sont renvoyés par l'application.

D'UNE TRANSFORMATION À L'AUTRE

De plus, dans toute catégorie, les transformations peuvent, comme des fonctions classiques, être «composées», ce qui signifie qu'on peut appliquer une transformation au résultat d'une autre transformation. Pour toute paire de transformations, constituée de $f: A \rightarrow B$ (lire « f est une transformation de A vers B ») et $g: B \rightarrow C$, la catégorie indique une unique transformation composée, notée $g \circ f: A \rightarrow C$ (la «composée de f et g est une transformation de A vers C »). Notons que la composition n'est possible que si l'ensemble de départ de g est identique à l'ensemble d'arrivée de f .

COMPOSITION DE DEUX TRANSFORMATIONS



On ajoute l'axiome naturel selon lequel cette loi de composition doit être associative, ce qui signifie que si f , g et h sont des applications composables entre elles dans cet ordre, les deux façons de les composer successivement coïncident: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

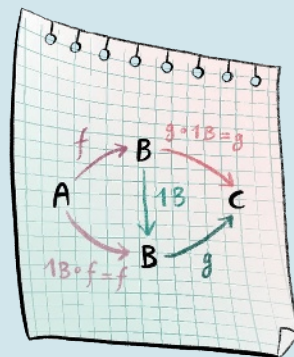
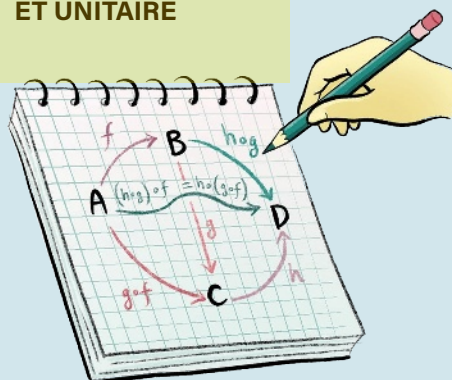
Enfin, cette loi doit être «unitaire»: chaque objet B possède une transformation nommée «identité», couramment notée 1_B («l'identité de B ») et ayant pour propriété fondamentale $g \circ 1_B = g$ et $1_B \circ f = f$, pour g et f des transformations dont, respectivement, l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée est B .

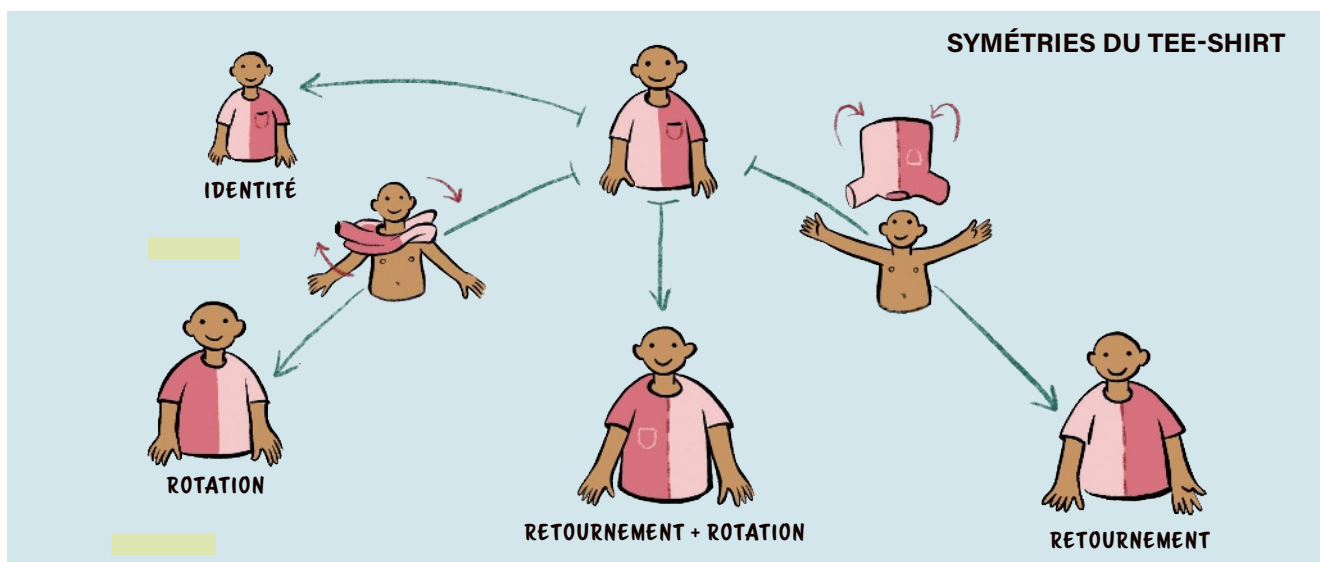
Alors que des collections de structures algébriques définies en algèbre universelle peuvent être distinctes les unes des autres, les catégories que ces objets habitent présentent des similarités que le langage des catégories permet d'exprimer précisément. Ainsi, ces similitudes, telles des analogies, relient entre eux certains concepts et réduisent énormément la quantité de notions nécessaires à comprendre, surtout dans certains domaines.

Avec suffisamment d'expérience, les mathématiciens savent en partie à quoi s'attendre lorsqu'ils rencontrent un nouveau type de structure algébrique. Cette idée se retrouve dans les manuels modernes d'algèbre, qui présentent successivement la théorie des groupes, celle des anneaux et celle des espaces vectoriels, essentiellement parce que ces théories sont semblables. Il existe d'autres analogies, plus lâches, entre ces catégories et celles que l'on rencontre en topologie ou en analyse, et ces similitudes facilitent l'absorption plus rapide de nouvelles connaissances.

Ces motifs répétés permettent alors d'appréhender rapidement de nouveaux objets et de consacrer ensuite plus de temps à explorer les questions particulières qui les distinguent – bien que les progrès de la recherche

LA LOI DE COMPOSITION EST ASSOCIATIVE ET UNITAIRE





mathématique soient souvent inspirés par des analogies nouvelles et surprenantes entre des domaines auparavant non reliés.

Les niveaux d'abstraction imbriqués, qui vont des structures mathématiques concrètes aux systèmes axiomatiques qui les généralisent, puis aux objets généraux appartenant aux catégories, présentent un nouveau défi: dire qu'un objet est «le même» qu'un autre n'a plus un sens clair. Prenons l'exemple d'un groupe, qui peut être envisagé comme un ensemble de symétries dont Amie Wilkinson, mathématicienne à l'université de Chicago, aime décrire les éléments comme des «mouvements» qui retournent ou mettent en rotation un objet pour le replacer dans une position analogue à sa position initiale.

Par exemple, examinons les symétries d'un tee-shirt. Une première symétrie possible est le mouvement «identité» (ou l'absence de mouvement), où une personne porte le tee-shirt comme il est habituellement porté. Une autre symétrie correspond au mouvement par lequel le porteur sort ses bras des manches et, avec le tee-shirt toujours autour du cou, le tourne de 180 degrés horizontalement pour mettre ses bras dans les manches opposées: le tee-shirt présente toujours sa face externe, mais est porté à l'envers. Une autre symétrie encore correspond à retirer entièrement le tee-shirt, échanger son intérieur et son extérieur, et le remettre de façon que chaque bras passe par la même manche qu'à l'origine. Le tee-shirt se retrouve donc ici à l'envers de deux façons en même temps: sont échangés l'intérieur et l'extérieur, ainsi que l'avant et l'arrière. Enfin, une dernière symétrie combine les deux mouvements précédents. Remarquons d'ailleurs que ces derniers peuvent être combinés dans n'importe quel ordre en donnant le même résultat, ce qui n'est pas forcément le cas dans d'autres

groupes. Chacun de ces quatre «mouvements» compte comme une symétrie, car il agit sur le tee-shirt en conservant la façon dont il est porté.

Un autre exemple de groupe facile à représenter est le groupe des «retournements d'un matelas», qui décrit les symétries d'un matelas. En plus du mouvement d'identité, qui laisse le matelas en place, on peut faire tourner le matelas pour échanger dessus et dessous, ou pour échanger tête et pieds à plat; et l'on peut effectuer ces deux mouvements successivement. Notons qu'avec un matelas carré, il y aurait eu

