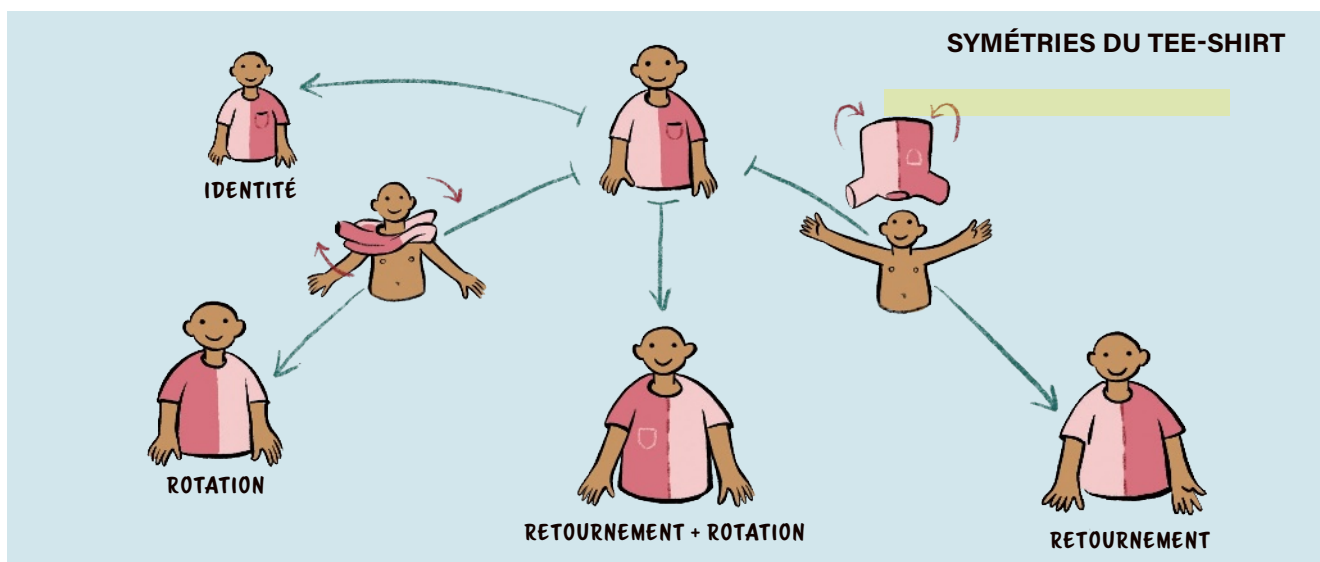




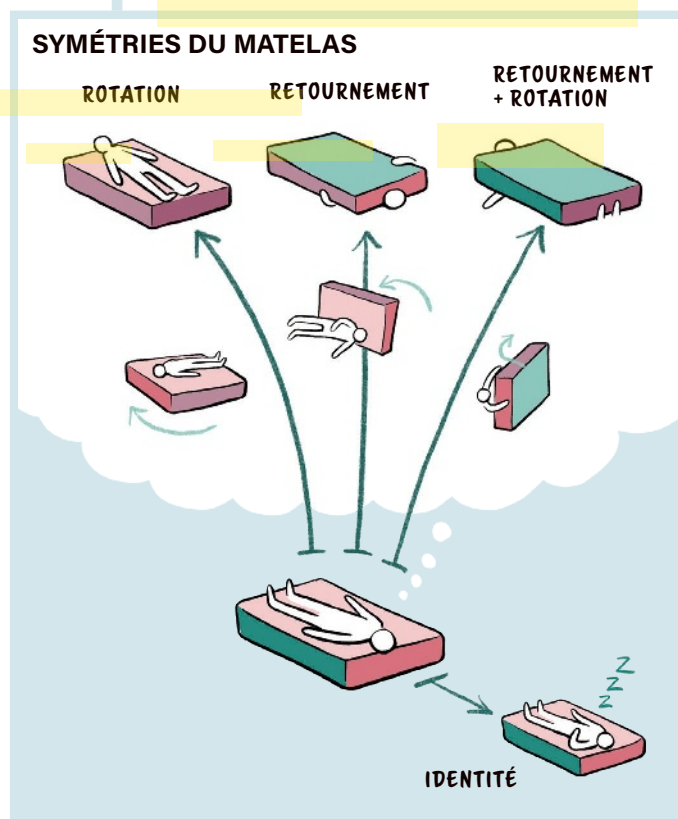
mathématique soient souvent inspirés par des analogies nouvelles et surprenantes entre des domaines auparavant non reliés.

Les niveaux d'abstraction imbriqués, qui vont des structures mathématiques concrètes aux systèmes axiomatiques qui les généralisent, puis aux objets généraux appartenant aux catégories, présentent un nouveau défi: dire qu'un objet est «le même» qu'un autre n'a plus un sens clair. Prenons l'exemple d'un groupe, qui peut être envisagé comme un ensemble de symétries dont Amie Wilkinson, mathématicienne à l'université de Chicago, aime décrire les éléments comme des «mouvements» qui retournent ou mettent en rotation un objet pour le replacer dans une position analogue à sa position initiale.

Par exemple, examinons les symétries d'un tee-shirt. Une première symétrie possible est le mouvement «identité» (ou l'absence de mouvement), où une personne porte le tee-shirt comme il est habituellement porté. Une autre symétrie correspond au mouvement par lequel le porteur sort ses bras des manches et, avec le tee-shirt toujours autour du cou, le tourne de 180 degrés horizontalement pour mettre ses bras dans les manches opposées: le tee-shirt présente toujours sa face externe, mais est porté à l'envers. Une autre symétrie encore correspond à retirer entièrement le tee-shirt, échanger son intérieur et son extérieur, et le remettre de façon que chaque bras passe par la même manche qu'à l'origine. Le tee-shirt se retrouve donc ici à l'envers de deux façons en même temps: sont échangés l'intérieur et l'extérieur, ainsi que l'avant et l'arrière. Enfin, une dernière symétrie combine les deux mouvements précédents. Remarquons d'ailleurs que ces derniers peuvent être combinés dans n'importe quel ordre en donnant le même résultat, ce qui n'est pas forcément le cas dans d'autres

groupes. Chacun de ces quatre «mouvements» compte comme une symétrie, car il agit sur le tee-shirt en conservant la façon dont il est porté.

Un autre exemple de groupe facile à représenter est le groupe des «retournements d'un matelas», qui décrit les symétries d'un matelas. En plus du mouvement d'identité, qui laisse le matelas en place, on peut faire tourner le matelas pour échanger dessus et dessous, ou pour échanger tête et pieds à plat; et l'on peut effectuer ces deux mouvements successivement. Notons qu'avec un matelas carré, il y aurait eu



encore d'autres symétries possibles, comme la rotation d'un quart de tour à plat.

Bien qu'un matelas n'ait pas grand-chose à voir avec un tee-shirt, les deux groupes que nous venons de décrire ont, en un certain sens, le même contenu, la même «forme». Premièrement, il y a le même nombre de symétries (4) dans chaque groupe, et on peut mettre en correspondance les symétries des deux groupes (associer l'identité à l'identité, la rotation du tee-shirt avec la rotation tête-pieds du matelas, le retournement du tee-shirt avec le retournement du matelas, et de même pour le dernier mouvement composé).

DES SYMÉTRIES ISOMORPHES

Par ailleurs, si l'on prend deux symétries d'un de ces groupes et qu'on les exécute successivement (qu'on les compose), la position finale de l'objet correspond au résultat d'une des quatre symétries du groupe. On note que si l'on prend les deux symétries dans l'autre groupe correspondant aux deux symétries initiales du premier groupe et qu'on les enchaîne de la même façon, la symétrie finale correspond aussi à celle du premier groupe. En termes techniques, ces groupes sont donc reliés par un «isomorphisme», un terme dont l'étymologie parle d'elle-même – en grec, *isos* signifie «même» et *morfê*, «forme».

On définit en fait la notion d'isomorphisme dans toute catégorie, ce qui permet de transposer ce concept d'un contexte mathématique à un autre. En toute généralité, un isomorphisme entre deux objets A et B (par exemple ici les symétries de retournement du tee-shirt et du matelas) d'une catégorie est une paire de transformations $f: A \rightarrow B$ et $g: B \rightarrow A$ telle que les deux compositions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont les transformations identités respectives des objets A et B (autrement dit, $g \circ f = 1_A$ et $f \circ g = 1_B$).

Dans la catégorie des espaces topologiques (des espaces dans lesquels est définie une notion de «proximité» entre les points), la notion d'isomorphisme correspond à une paire de fonctions continues inverses l'une de l'autre. Ici, «continue» signifie, intuitivement, que les fonctions ne font pas de «saut», c'est-à-dire que si x varie peu, alors $f(x)$ varie peu également. Par exemple, il existe une déformation continue qui transforme un beignet (de forme annulaire) en une tasse à café: le trou du beignet devient l'anse de la tasse, qui est formée en aplatisant le beignet pour le rendre plus fin. Afin que la déformation soit continue, elle ne doit impliquer ni déchirure ni recollement.

Cet exemple de deux espaces qui sont continûment déformables l'un en l'autre a inspiré la boutade selon laquelle un topologue ne sait pas faire la différence entre une tasse à café et un beignet: en tant qu'espaces abstraits, ces objets sont les mêmes. En pratique, les

topologues attribuent parfois un sens encore plus souple à l'identification de deux espaces, deux espaces étant considérés comme identiques s'ils sont simplement «homotopiquement équivalents». Cette identification correspond à la notion d'isomorphisme dans une autre catégorie, plus exotique que celle déjà évoquée: la catégorie homotopique des espaces topologiques.

Concrètement, qu'est-ce qu'une équivalence d'homotopie? C'est un autre type de déformation continue, plus souple, dans laquelle il est possible de recoller plusieurs points distincts en un seul, sans toutefois créer et reboucher des trous. Par exemple, imaginons qu'on parte d'un pantalon et qu'on en réduise la longueur des jambes à néant pour obtenir un «string». Cet autre espace est doté de la même structure topologique fondamentale – il y a toujours deux trous pour les jambes –, même si le vêtement bidimensionnel originel a été réduit à un bout de ficelle unidimensionnel.

Un autre exemple d'équivalence d'homotopie, plus surprenant, est celui qui réduit l'étendue infinie de l'Univers euclidien tridimensionnel à un seul point, à travers une sorte de «Big Bang inversé» dans lequel chaque point de l'espace est relié à l'origine du repère, par exemple par le chemin le plus court (le segment reliant les deux points), la vitesse de ce mouvement étant proportionnelle à la distance séparant chaque point et l'origine, avant le Big Bang inversé. Un espace homotopiquement équivalent à un point est dit «contractile».

L'idée selon laquelle il est possible de remplacer un objet mathématique par un autre qui lui est isomorphe sans changer fondamentalement la nature d'une construction ou d'un argument a pris tant de place en mathématiques que les catégoriciens ont fini par donner à l'article défini «le» ou «la» un sens plus proche de l'article indéfini «un».

Par exemple, en théorie des ensembles, il existe un concept élémentaire connu sous le nom d'«union disjointe» de deux ensembles A et B. Comme l'union ordinaire $A \cup B$, l'union disjointe $A \sqcup B$ comporte une copie de chaque élément de A et une copie de chaque élément de B. Cependant, contrairement à l'union ordinaire, si A et B ont un élément en commun, alors l'union disjointe $A \sqcup B$ possède deux copies de cet élément, dont l'une «se souvient» en quelque sorte qu'elle provient de A, et l'autre «se souvient» qu'elle provient de B.

Il existe de nombreuses façons de construire l'union disjointe de deux ensembles en utilisant les axiomes de la théorie des ensembles. Ces différentes constructions ne produiront pas des ensembles strictement identiques, mais ils seront nécessairement isomorphes. Plutôt que de perdre du temps à débattre pour savoir quelle

GLOSSAIRE

Catégorie : Collection bien définie d'objets de même nature et de transformations entre eux, munie d'une loi de composition.

Composition : Opération consistant à appliquer une transformation à la suite d'une autre.

Identité : L'unique transformation d'un objet en lui-même et qui ne le modifie d'aucune façon.

Symétrie : Transformation inversible d'un objet.

Isomorphisme : Notion structurelle de « similitude » qui peut exister entre deux objets d'une catégorie.

Groupeïde fondamental : Catégorie associée à un espace topologique, dont les objets sont les points de l'espace, et dont les transformations sont les chemins dans l'espace, ces derniers étant considérés à homotopie près.

Homotopie : Un « chemin entre deux chemins », défini par une déformation continue de l'un vers l'autre.

Infini-catégorie : Analogue en dimension infinie d'une catégorie, avec des transformations en dimension supérieure et une loi de composition vérifiant des propriétés plus faibles.

Infini-groupeïde fondamental : Infini-catégorie constituée de points, de chemins, d'homotopies et d'homotopies supérieures dans un espace.