

encore d'autres symétries possibles, comme la rotation d'un quart de tour à plat.

Bien qu'un matelas n'ait pas grand-chose à voir avec un tee-shirt, les deux groupes que nous venons de décrire ont, en un certain sens, le même contenu, la même « forme ». Premièrement, il y a le même nombre de symétries (4) dans chaque groupe, et on peut mettre en correspondance les symétries des deux groupes (associer l'identité à l'identité, la rotation du tee-shirt avec la rotation tête-pieds du matelas, le retournement du tee-shirt avec le retournement du matelas, et de même pour le dernier mouvement composé).

DES SYMÉTRIES ISOMORPHES

Par ailleurs, si l'on prend deux symétries d'un de ces groupes et qu'on les exécute successivement (qu'on les compose), la position finale de l'objet correspond au résultat d'une des quatre symétries du groupe. On note que si l'on prend les deux symétries dans l'autre groupe correspondant aux deux symétries initiales du premier groupe et qu'on les enchaîne de la même façon, la symétrie finale correspond aussi à celle du premier groupe. En termes techniques, ces groupes sont donc reliés par un « isomorphisme », un terme dont l'étymologie parle d'elle-même – en grec, *isos* signifie « même » et *morfê*, « forme ».

On définit en fait la notion d'isomorphisme dans toute catégorie, ce qui permet de transposer ce concept d'un contexte mathématique à un autre. En toute généralité, un isomorphisme entre deux objets A et B (par exemple ici les symétries de retournement du tee-shirt et du matelas) d'une catégorie est une paire de transformations $f: A \rightarrow B$ et $g: B \rightarrow A$ telle que les deux compositions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont les transformations identités respectives des objets A et B (autrement dit, $g \circ f = 1_A$ et $f \circ g = 1_B$).

Dans la catégorie des espaces topologiques (des espaces dans lesquels est définie une notion de « proximité » entre les points), la notion d'isomorphisme correspond à une paire de fonctions continues inverses l'une de l'autre. Ici, « continue » signifie, intuitivement, que les fonctions ne font pas de « saut », c'est-à-dire que si x varie peu, alors $f(x)$ varie peu également. Par exemple, il existe une déformation continue qui transforme un beignet (de forme annulaire) en une tasse à café: le trou du beignet devient l'anse de la tasse, qui est formée en aplatisant le beignet pour le rendre plus fin. Afin que la déformation soit continue, elle ne doit impliquer ni déchirure ni recollement.

Cet exemple de deux espaces qui sont continûment déformables l'un en l'autre a inspiré la boutade selon laquelle un topologue ne sait pas faire la différence entre une tasse à café et un beignet: en tant qu'espaces abstraits, ces objets sont les mêmes. En pratique, les

topologues attribuent parfois un sens encore plus souple à l'identification de deux espaces, deux espaces étant considérés comme identiques s'ils sont simplement « homotopiquement équivalents ». Cette identification correspond à la notion d'isomorphisme dans une autre catégorie, plus exotique que celle déjà évoquée: la catégorie homotopique des espaces topologiques.

Concrètement, qu'est-ce qu'une équivalence d'homotopie? C'est un autre type de déformation continue, plus souple, dans laquelle il est possible de recoller plusieurs points distincts en un seul, sans toutefois créer et reboucher des trous. Par exemple, imaginons qu'on parte d'un pantalon et qu'on en réduise la longueur des jambes à néant pour obtenir un « string ». Cet autre espace est doté de la même structure topologique fondamentale – il y a toujours deux trous pour les jambes –, même si le vêtement bidimensionnel originel a été réduit à un bout de ficelle unidimensionnel.

Un autre exemple d'équivalence d'homotopie, plus surprenant, est celui qui réduit l'étendue infinie de l'Univers euclidien tridimensionnel à un seul point, à travers une sorte de « Big Bang inversé » dans lequel chaque point de l'espace est relié à l'origine du repère, par exemple par le chemin le plus court (le segment reliant les deux points), la vitesse de ce mouvement étant proportionnelle à la distance séparant chaque point et l'origine, avant le Big Bang inversé. Un espace homotopiquement équivalent à un point est dit « contractile ».

L'idée selon laquelle il est possible de remplacer un objet mathématique par un autre qui lui est isomorphe sans changer fondamentalement la nature d'une construction ou d'un argument a pris tant de place en mathématiques que les catégoriciens ont fini par donner à l'article défini « le » ou « la » un sens plus proche de l'article indéfini « un ».

Par exemple, en théorie des ensembles, il existe un concept élémentaire connu sous le nom d'« union disjointe » de deux ensembles A et B . Comme l'union ordinaire $A \cup B$, l'union disjointe $A \sqcup B$ comporte une copie de chaque élément de A et une copie de chaque élément de B . Cependant, contrairement à l'union ordinaire, si A et B ont un élément en commun, alors l'union disjointe $A \sqcup B$ possède deux copies de cet élément, dont l'une « se souvient » en quelque sorte qu'elle provient de A , et l'autre « se souvient » qu'elle provient de B .

Il existe de nombreuses façons de construire l'union disjointe de deux ensembles en utilisant les axiomes de la théorie des ensembles. Ces différentes constructions ne produiront pas des ensembles strictement identiques, mais ils seront nécessairement isomorphes. Plutôt que de perdre du temps à débattre pour savoir quelle

GLOSSAIRE

Catégorie : Collection bien définie d'objets de même nature et de transformations entre eux, munie d'une loi de composition.

Composition : Opération consistant à appliquer une transformation à la suite d'une autre.

Identité : L'unique transformation d'un objet en lui-même et qui ne le modifie d'aucune façon.

Symétrie : Transformation inversible d'un objet.

Isomorphisme : Notion structurelle de « similitude » qui peut exister entre deux objets d'une catégorie.

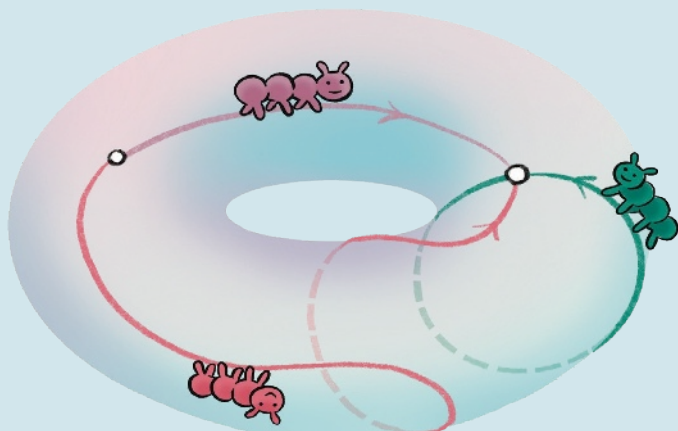
Groupeïde fondamental : Catégorie associée à un espace topologique, dont les objets sont les points de l'espace, et dont les transformations sont les chemins dans l'espace, ces derniers étant considérés à homotopie près.

Homotopie : Un « chemin entre deux chemins », défini par une déformation continue de l'un vers l'autre.

Infini-catégorie : Analogue en dimension infinie d'une catégorie, avec des transformations en dimension supérieure et une loi de composition vérifiant des propriétés plus faibles.

Infini-groupeïde fondamental : Infini-catégorie constituée de points, de chemins, d'homotopies et d'homotopies supérieures dans un espace.

LES CHEMINS DE FOURMIS SUR L'ESPACE X



construction est la plus « canonique » (la plus « classique »), il est plus pratique d'ignorer cette ambiguïté et de parler de « l'union disjointe » pour désigner n'importe quel ensemble particulier qui satisfait la « propriété universelle » caractérisant l'union disjointe (et qui formalise la description intuitive que nous venons de donner de l'union disjointe). Pour reprendre les exemples des symétries du tee-shirt et du matelas, les mathématiciens désignent ces deux groupes de symétrie sous le même nom de « groupe de Klein », du nom du mathématicien allemand Felix Klein.

L'IMPORTANCE DES RELATIONS

D'après une histoire maintes fois contée, le résultat fondamental de la théorie des catégories, le lemme de Yoneda, aurait été énoncé pour la première fois en 1954, à la gare du Nord, à Paris. Le jeune mathématicien Nobuo Yoneda y aurait commencé à décrire son « lemme » (c'est-à-dire un théorème directement appliqué à la démonstration d'un autre théorème) à Mac Lane, sur le quai, et l'aurait poursuivi dans le train jusqu'au départ de celui-ci. Le lemme, rappelons-le, assure que tout objet dans une catégorie quelconque est entièrement déterminé par ses relations aux autres objets de la même catégorie, ces relations étant les transformations vers ou depuis cet objet. On peut donc caractériser entièrement un espace topologique X en le « testant » grâce à toutes les fonctions continues de type $f: T \rightarrow X$ partant d'un autre espace T .

Par exemple, comment retrouver les points de X à partir de fonctions continues de cette forme ? Il se trouve que les points de X sont en correspondance parfaite avec les fonctions continues de la forme $f: * \rightarrow X$, où $*$ est l'espace à un seul point. En effet, si x est un point de X , on peut construire la fonction qui à y , l'unique

point de l'espace $*$, associe x , et qui est ainsi entièrement déterminée et continue. Dans l'autre sens, si $f: * \rightarrow X$ est une fonction continue, il suffit de prendre $f(y)$ comme point de X , et cette correspondance est dite « bijective », c'est-à-dire qu'elle associe à chaque point de X une unique fonction de la forme voulue.

Voici un autre exemple de question à laquelle il est possible de répondre en examinant les fonctions continues vers X . Il existe une notion sur les espaces topologiques nommée « connexité par arcs », qui décrit le fait que X est « d'un seul tenant », au sens où il n'est pas séparé en deux blocs distincts impossibles à relier. La connexité par arcs de X est définie formellement en considérant les fonctions continues $p: I \rightarrow X$, où I est l'intervalle $[0, 1]$ des nombres réels compris entre 0 et 1. Une fonction de cette forme définit donc un « chemin » paramétré continu dans l'espace X du point $p(0)$ au point $p(1)$, que l'on peut voir comme la trajectoire possible qu'une fourmi pourrait emprunter entre ces points en se promenant dans l'espace X . Plus précisément, X est connexe par arcs lorsqu'il est possible de relier toute paire de points par un tel chemin continu.

On peut plus généralement utiliser les points et les chemins d'un espace pour traduire des questions topologiques en des problèmes algébriques, en associant à chaque espace topologique X une catégorie notée $\pi_1(X)$ et nommée le « groupoïde fondamental » de X . Cette structure est une catégorie proche d'un groupe, mais dont tous les éléments ne peuvent pas être composés, d'où le terme « groupoïde ». En effet, ses objets sont par définition les points, et les transformations sont les chemins entre les points, que l'on a construits précédemment avec les fonctions $p: I \rightarrow X$. On ne peut alors composer deux chemins (vus comme des transformations) que si l'arrivée du premier coïncide avec le départ du second. En outre, si un chemin peut être déformé en un autre en laissant fixes les deux extrémités, les chemins définissent la même transformation. Il faut



Le lemme de Yoneda aurait été énoncé pour la première fois à la gare du Nord, à Paris

