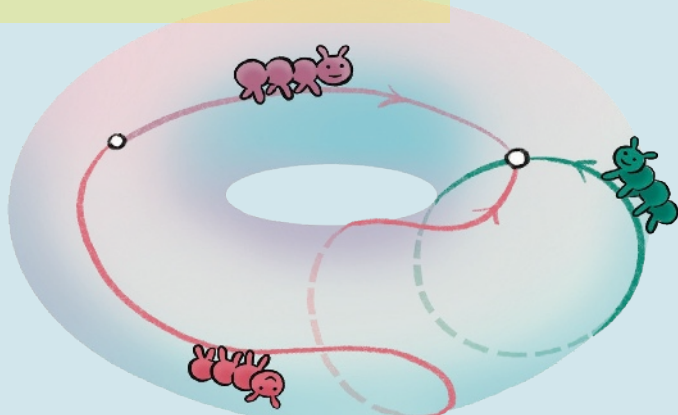


LES CHEMINS DE FOURMIS SUR L'ESPACE X



construction est la plus « canonique » (la plus « classique »), il est plus pratique d'ignorer cette ambiguïté et de parler de « l'union disjointe » pour désigner n'importe quel ensemble particulier qui satisfait la « propriété universelle » caractérisant l'union disjointe (et qui formalise la description intuitive que nous venons de donner de l'union disjointe). Pour reprendre les exemples des symétries du tee-shirt et du matelas, les mathématiciens désignent ces deux groupes de symétrie sous le même nom de « groupe de Klein », du nom du mathématicien allemand Felix Klein.

L'IMPORTANCE DES RELATIONS

D'après une histoire maintes fois contée, le résultat fondamental de la théorie des catégories, le lemme de Yoneda, aurait été énoncé pour la première fois en 1954, à la gare du Nord, à Paris. Le jeune mathématicien Nobuo Yoneda y aurait commencé à décrire son « lemme » (c'est-à-dire un théorème directement appliqué à la démonstration d'un autre théorème) à Mac Lane, sur le quai, et l'aurait poursuivi dans le train jusqu'au départ de celui-ci. Le lemme, rappelons-le, assure que tout objet dans une catégorie quelconque est entièrement déterminé par ses relations aux autres objets de la même catégorie, ces relations étant les transformations vers ou depuis cet objet. On peut donc caractériser entièrement un espace topologique X en le « testant » grâce à toutes les fonctions continues de type $f: T \rightarrow X$ partant d'un autre espace T .

Par exemple, comment retrouver les points de X à partir de fonctions continues de cette forme ? Il se trouve que les points de X sont en correspondance parfaite avec les fonctions continues de la forme $f: * \rightarrow X$, où $*$ est l'espace à un seul point. En effet, si x est un point de X , on peut construire la fonction qui à y , l'unique

point de l'espace $*$, associe x , et qui est ainsi entièrement déterminée et continue. Dans l'autre sens, si $f: * \rightarrow X$ est une fonction continue, il suffit de prendre $f(y)$ comme point de X , et cette correspondance est dite « bijective », c'est-à-dire qu'elle associe à chaque point de X une unique fonction de la forme voulue.

Voici un autre exemple de question à laquelle il est possible de répondre en examinant les fonctions continues vers X . Il existe une notion sur les espaces topologiques nommée « connexité par arcs », qui décrit le fait que X est « d'un seul tenant », au sens où il n'est pas séparé en deux blocs distincts impossibles à relier. La connexité par arcs de X est définie formellement en considérant les fonctions continues $p: I \rightarrow X$, où I est l'intervalle $[0, 1]$ des nombres réels compris entre 0 et 1. Une fonction de cette forme définit donc un « chemin » paramétré continu dans l'espace X du point $p(0)$ au point $p(1)$, que l'on peut voir comme la trajectoire possible qu'une fourmi pourrait emprunter entre ces points en se promenant dans l'espace X . Plus précisément, X est connexe par arcs lorsqu'il est possible de relier toute paire de points par un tel chemin continu.

On peut plus généralement utiliser les points et les chemins d'un espace pour traduire des questions topologiques en des problèmes algébriques, en associant à chaque espace topologique X une catégorie notée $\pi_1(X)$ et nommée le « groupoïde fondamental » de X . Cette structure est une catégorie proche d'un groupe, mais dont tous les éléments ne peuvent pas être composés, d'où le terme « groupoïde ». En effet, ses objets sont par définition les points, et les transformations sont les chemins entre les points, que l'on a construits précédemment avec les fonctions $p: I \rightarrow X$. On ne peut alors composer deux chemins (vus comme des transformations) que si l'arrivée du premier coïncide avec le départ du second. En outre, si un chemin peut être déformé en un autre en laissant fixes les deux extrémités, les chemins définissent la même transformation. Il faut

**Le lemme de Yoneda
aurait été énoncé
pour la première fois
à la gare du Nord,
à Paris**

nécessairement prendre en compte ces déformations de chemins, techniquement nommées «homotopies», pour que la composition de chemins définisse une opération associative, comme l'exige une catégorie.

Un avantage clé de la construction des groupoïdes fondamentaux est qu'elle est «fonctorielle», ce qui signifie qu'une fonction continue entre deux espaces topologiques, $f: X \rightarrow Y$, donne naissance à une transformation correspondante notée $\pi_1(f): \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ entre les groupoïdes fondamentaux des espaces. Cette assignation respecte la composition et les identités, ce qui signifie respectivement qu'on a les formules $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$ et $\pi_1(1_X) = 1_{\pi_1(X)}$. Ces deux propriétés, résumées sous le nom de «fonctorialité», suggèrent que les groupoïdes fondamentaux reflètent certaines informations essentielles sur les espaces topologiques. En particulier, si deux espaces topologiques sont équivalents du point de vue de l'homotopie, alors leurs groupoïdes fondamentaux sont nécessairement isomorphes.

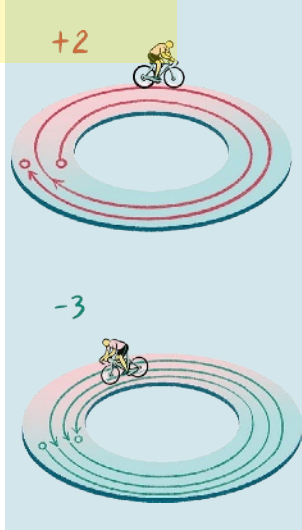
Mais les groupoïdes fondamentaux ne sont cependant pas tous isomorphes. Par exemple, ils permettent de faire une distinction nette entre un disque et son cercle extérieur.

Dans le groupoïde fondamental du cercle, si l'on fixe un point, on peut par exemple décrire facilement les trajectoires partant de ce point et revenant à ce point de départ, grâce à un unique nombre entier relatif qui encode le «nombre de tours» faits par la trajectoire (avec un signe, choisi arbitrairement, pour un tour dans le sens horaire, et le signe opposé pour un tour dans le sens antihoraire). Ici, dans une trajectoire, de petits allers-retours entre deux points proches sur le cercle ne contribueraient pas à ce nombre de tours, car on peut les effacer totalement en déformant continûment la trajectoire par homotopie. L'entier associé à une trajectoire, lui, décrit le «vrai» nombre de tours effectués par la trajectoire, et, si deux chemins ne font pas le même nombre de tours, alors ils ne sont pas déformables l'un en l'autre. Le groupoïde fondamental «contient» donc au moins l'ensemble des entiers relatifs.

À l'inverse, dans le groupoïde fondamental du disque, il n'existe, à homotopie près, qu'un seul chemin entre toute paire de points. Ces deux groupoïdes fondamentaux ne sont donc pas identiques. Enfin, le groupoïde fondamental d'une sphère (creuse) a la même propriété: il y a un unique chemin entre deux points à homotopie près.

Un problème se pose à propos du groupoïde fondamental: les points et chemins qu'il englobe ne donnent aucune information sur la structure d'un espace dans les dimensions supérieures à 1, car un point et un chemin sont eux-mêmes de dimensions 0 et 1 respectivement.

LE GROUPOÏDE FONDAMENTAL DU CERCLE



Une solution pour saisir les propriétés des espaces en plus haute dimension est de remarquer que l'intervalle I , espace de départ des chemins continus $p: I \rightarrow X$ utilisés pour construire le groupoïde fondamental $\pi_1(X)$, est ce qu'on nomme techniquement une «boule» (pleine) de dimension 1. Cela se généralise aisément en dimension supérieure: on peut considérer les fonctions continues allant de la boule usuelle de dimension 2 (le disque) vers X (nommées «homotopies», il s'agit en fait de la même notion d'homotopie que celle déjà décrite), celles allant de la boule de dimension 3 vers X , et ainsi de suite avec toutes les dimensions supérieures (nommées «homotopies supérieures»), puis rassembler toutes ces fonctions dans une même structure.

Une question naturelle vient alors à l'esprit: quel type de structure algébrique forment ensemble les points, chemins, homotopies et homotopies supérieures? Cette structure, notée $\pi_\infty(X)$ («pi-infini de X ») et nommée «infini-groupoïde fondamental de X », est justement un exemple d'infini-catégorie, l'analogue en dimension infinie des catégories introduites par Eilenberg et Mac Lane, et présentées au début de cet article.

VERS L'INFINI...

Comme une catégorie ordinaire, une infini-catégorie comporte des objets et des transformations représentées par des flèches unidimensionnelles, mais aussi des «transformations supérieures» représentées par des flèches bidimensionnelles, tridimensionnelles, etc. Par exemple, dans $\pi_\infty(X)$, les objets et les flèches sont respectivement les points et les chemins (pas à déformation près, ici), et les transformations supérieures encodent les homotopies supérieures. En particulier, on retrouve donc la notion d'homotopie entre deux chemins, représentée cette fois par une flèche bidimensionnelle reliant deux flèches classiques.

LE GROUPOÏDE FONDAMENTAL DU DISQUE

