

nécessairement prendre en compte ces déformations de chemins, techniquement nommées «homotopies», pour que la composition de chemins définisse une opération associative, comme l'exige une catégorie.

Un avantage clé de la construction des groupoïdes fondamentaux est qu'elle est «fonctorielle», ce qui signifie qu'une fonction continue entre deux espaces topologiques, $f: X \rightarrow Y$, donne naissance à une transformation correspondante notée $\pi_1(f): \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ entre les groupoïdes fondamentaux des espaces. Cette assignation respecte la composition et les identités, ce qui signifie respectivement qu'on a les formules $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$ et $\pi_1(1_X) = 1_{\pi_1(X)}$. Ces deux propriétés, résumées sous le nom de «fonctorialité», suggèrent que les groupoïdes fondamentaux reflètent certaines informations essentielles sur les espaces topologiques. En particulier, si deux espaces topologiques sont équivalents du point de vue de l'homotopie, alors leurs groupoïdes fondamentaux sont nécessairement isomorphes.

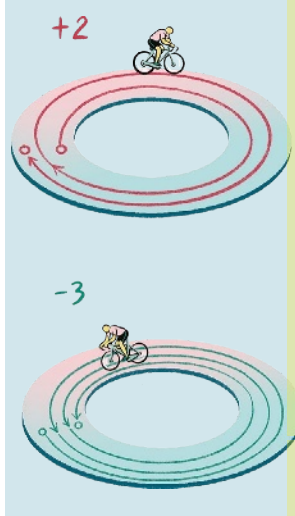
Mais les groupoïdes fondamentaux ne sont cependant pas tous isomorphes. Par exemple, ils permettent de faire une distinction nette entre un disque et son cercle extérieur.

Dans le groupoïde fondamental du cercle, si l'on fixe un point, on peut par exemple décrire facilement les trajectoires partant de ce point et revenant à ce point de départ, grâce à un unique nombre entier relatif qui encode le «nombre de tours» faits par la trajectoire (avec un signe, choisi arbitrairement, pour un tour dans le sens horaire, et le signe opposé pour un tour dans le sens antihoraire). Ici, dans une trajectoire, de petits allers-retours entre deux points proches sur le cercle ne contribueraient pas à ce nombre de tours, car on peut les effacer totalement en déformant continûment la trajectoire par homotopie. L'entier associé à une trajectoire, lui, décrit le «vrai» nombre de tours effectués par la trajectoire, et, si deux chemins ne font pas le même nombre de tours, alors ils ne sont pas déformables l'un en l'autre. Le groupoïde fondamental «contient» donc au moins l'ensemble des entiers relatifs.

À l'inverse, dans le groupoïde fondamental du disque, il n'existe, à homotopie près, qu'un seul chemin entre toute paire de points. Ces deux groupoïdes fondamentaux ne sont donc pas identiques. Enfin, le groupoïde fondamental d'une sphère (creuse) a la même propriété: il y a un unique chemin entre deux points à homotopie près.

Un problème se pose à propos du groupoïde fondamental: les points et chemins qu'il englobe ne donnent aucune information sur la structure d'un espace dans les dimensions supérieures à 1, car un point et un chemin sont eux-mêmes de dimensions 0 et 1 respectivement.

LE GROUPOÏDE FONDAMENTAL DU CERCLE



Une solution pour saisir les propriétés des espaces en plus haute dimension est de remarquer que l'intervalle I , espace de départ des chemins continus $p: I \rightarrow X$ utilisés pour construire le groupoïde fondamental $\pi_1(X)$, est ce qu'on nomme techniquement une «boule» (pleine) de dimension 1. Cela se généralise aisément en dimension supérieure: on peut considérer les fonctions continues allant de la boule usuelle de dimension 2 (le disque) vers X (nommées «homotopies», il s'agit en fait de la même notion d'homotopie que celle déjà décrite), celles allant de la boule de dimension 3 vers X , et ainsi de suite avec toutes les dimensions supérieures (nommées «homotopies supérieures»), puis rassembler toutes ces fonctions dans une même structure.

Une question naturelle vient alors à l'esprit: quel type de structure algébrique forment ensemble les points, chemins, homotopies et homotopies supérieures? Cette structure, notée $\pi_\infty(X)$ («pi-infini de X ») et nommée «infini-groupoïde fondamental de X », est justement un exemple d'infini-catégorie, l'analogue en dimension infinie des catégories introduites par Eilenberg et Mac Lane, et présentées au début de cet article.

VERS L'INFINI...

Comme une catégorie ordinaire, une infini-catégorie comporte des objets et des transformations représentées par des flèches unidimensionnelles, mais aussi des «transformations supérieures» représentées par des flèches bidimensionnelles, tridimensionnelles, etc. Par exemple, dans $\pi_\infty(X)$, les objets et les flèches sont respectivement les points et les chemins (pas à déformation près, ici), et les transformations supérieures encodent les homotopies supérieures. En particulier, on retrouve donc la notion d'homotopie entre deux chemins, représentée cette fois par une flèche bidimensionnelle reliant deux flèches classiques.

LE GROUPOÏDE FONDAMENTAL DU DISQUE

