

nécessairement prendre en compte ces déformations de chemins, techniquement nommées «homotopies», pour que la composition de chemins définisse une opération associative, comme l'exige une catégorie.

Un avantage clé de la construction des groupoïdes fondamentaux est qu'elle est «fonctorielle», ce qui signifie qu'une fonction continue entre deux espaces topologiques, $f: X \rightarrow Y$, donne naissance à une transformation correspondante notée $\pi_1(f): \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ entre les groupoïdes fondamentaux des espaces. Cette assignation respecte la composition et les identités, ce qui signifie respectivement qu'on a les formules $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$ et $\pi_1(1_X) = 1_{\pi_1(X)}$. Ces deux propriétés, résumées sous le nom de «fonctorialité», suggèrent que les groupoïdes fondamentaux reflètent certaines informations essentielles sur les espaces topologiques. En particulier, si deux espaces topologiques sont équivalents du point de vue de l'homotopie, alors leurs groupoïdes fondamentaux sont nécessairement isomorphes.

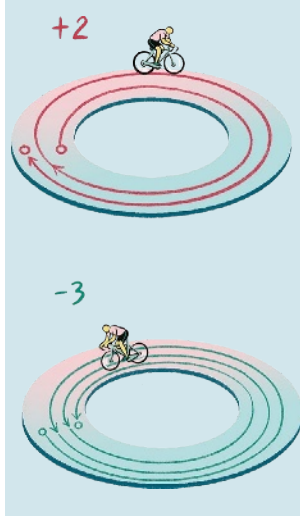
Mais les groupoïdes fondamentaux ne sont cependant pas tous isomorphes. Par exemple, ils permettent de faire une distinction nette entre un disque et son cercle extérieur.

Dans le groupoïde fondamental du cercle, si l'on fixe un point, on peut par exemple décrire facilement les trajectoires partant de ce point et revenant à ce point de départ, grâce à un unique nombre entier relatif qui encode le «nombre de tours» faits par la trajectoire (avec un signe, choisi arbitrairement, pour un tour dans le sens horaire, et le signe opposé pour un tour dans le sens antihoraire). Ici, dans une trajectoire, de petits allers-retours entre deux points proches sur le cercle ne contribueraient pas à ce nombre de tours, car on peut les effacer totalement en déformant continûment la trajectoire par homotopie. L'entier associé à une trajectoire, lui, décrit le «vrai» nombre de tours effectués par la trajectoire, et, si deux chemins ne font pas le même nombre de tours, alors ils ne sont pas déformables l'un en l'autre. Le groupoïde fondamental «contient» donc au moins l'ensemble des entiers relatifs.

À l'inverse, dans le groupoïde fondamental du disque, il n'existe, à homotopie près, qu'un seul chemin entre toute paire de points. Ces deux groupoïdes fondamentaux ne sont donc pas identiques. Enfin, le groupoïde fondamental d'une sphère (creuse) a la même propriété: il y a un unique chemin entre deux points à homotopie près.

Un problème se pose à propos du groupoïde fondamental: les points et chemins qu'il englobe ne donnent aucune information sur la structure d'un espace dans les dimensions supérieures à 1, car un point et un chemin sont eux-mêmes de dimensions 0 et 1 respectivement.

LE GROUPOÏDE FONDAMENTAL DU CERCLE



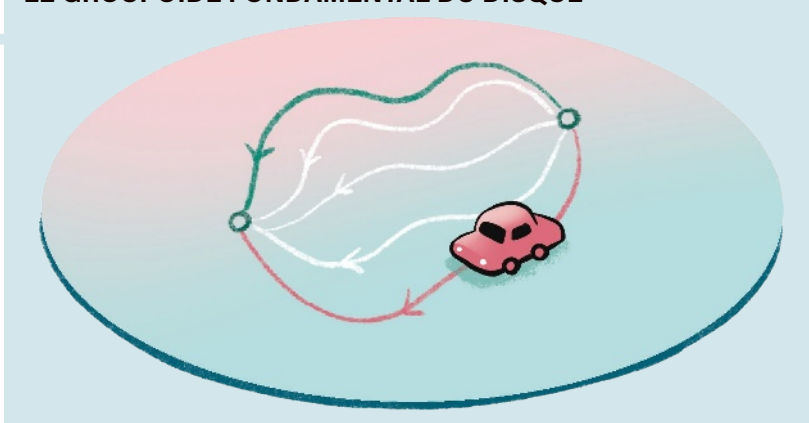
Une solution pour saisir les propriétés des espaces en plus haute dimension est de remarquer que l'intervalle I , espace de départ des chemins continus $p: I \rightarrow X$ utilisés pour construire le groupoïde fondamental $\pi_1(X)$, est ce qu'on nomme techniquement une «boule» (pleine) de dimension 1. Cela se généralise aisément en dimension supérieure: on peut considérer les fonctions continues allant de la boule usuelle de dimension 2 (le disque) vers X (nommées «homotopies», il s'agit en fait de la même notion d'homotopie que celle déjà décrite), celles allant de la boule de dimension 3 vers X , et ainsi de suite avec toutes les dimensions supérieures (nommées «homotopies supérieures»), puis rassembler toutes ces fonctions dans une même structure.

Une question naturelle vient alors à l'esprit: quel type de structure algébrique forment ensemble les points, chemins, homotopies et homotopies supérieures? Cette structure, notée $\pi_\infty(X)$ («pi-infini de X ») et nommée «infini-groupoïde fondamental de X », est justement un exemple d'infini-catégorie, l'analogue en dimension infinie des catégories introduites par Eilenberg et Mac Lane, et présentées au début de cet article.

VERS L'INFINI...

Comme une catégorie ordinaire, une infini-catégorie comporte des objets et des transformations représentées par des flèches unidimensionnelles, mais aussi des «transformations supérieures» représentées par des flèches bidimensionnelles, tridimensionnelles, etc. Par exemple, dans $\pi_\infty(X)$, les objets et les flèches sont respectivement les points et les chemins (pas à déformation près, ici), et les transformations supérieures encodent les homotopies supérieures. En particulier, on retrouve donc la notion d'homotopie entre deux chemins, représentée cette fois par une flèche bidimensionnelle reliant deux flèches classiques.

LE GROUPOÏDE FONDAMENTAL DU DISQUE



Toujours comme dans une catégorie ordinaire, il existe une composition entre des flèches de même dimension: si on a deux flèches $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$, alors il doit aussi exister une flèche $g \circ f: X \rightarrow Z$. Tout semble bien fonctionner, mais attention, une subtilité technique complexifie ici la situation. En effet, pour définir l'infini-groupeïde fondamental d'une façon utile, il est nécessaire d'affaiblir les axiomes sur la composition. Plus précisément, pour toute paire de flèches composables, on demande qu'il existe toujours une composition, mais elle n'est pas forcément unique: elle n'est unique qu'à homotopie supérieure près, ce qui signifie concrètement que deux compositions de f et g sont forcément reliées par une homotopie supérieure.

Ce défaut d'unicité fait qu'il est difficile de définir les infini-catégories en utilisant seulement les fondements classiques des mathématiques qui reposent sur la théorie des ensembles, car la composition ne se comporte plus exactement comme les opérations qui apparaissent dans l'algèbre universelle. En conséquence, bien que les infini-catégories soient de plus en plus au cœur de la recherche moderne dans de nombreux domaines des mathématiques, de la théorie quantique des champs à la géométrie algébrique en passant par la topologie algébrique, elles sont souvent considérées comme trop difficiles à définir et à manipuler par la plupart des mathématiciens qui n'en sont pas spécialistes. Elles sont d'ailleurs rarement enseignées aux étudiants.

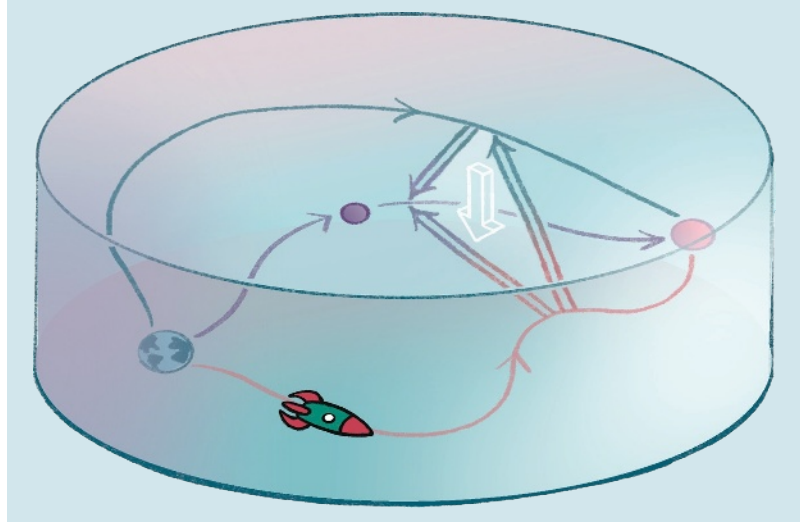
DE NOUVELLES CONNEXIONS

Néanmoins, comme beaucoup d'autres, je vois les infini-catégories comme des constructions tout à fait novatrices permettant aux mathématiciens d'envisager de nouvelles connexions entre des objets ou des théorèmes qu'il aurait été, autrement, impossible d'énoncer ou de démontrer rigoureusement.

L'expérience historique suggère que les mathématiques les plus exotiques aujourd'hui finiront par être vues comme simples et par être enseignées à la plupart des futurs étudiants en mathématiques. En tant que chercheuse en théorie des infini-catégories, je trouve d'ailleurs amusant de spéculer sur la façon dont ce sujet pourrait être simplifié ou rendu plus intuitif.

Une possibilité est que l'on utilisera une ruse langagière, une version généralisée à l'extrême du «le» des catégories (cachant, en fait, un «un») qui pourrait rendre les infini-catégories aussi faciles à appréhender pour les étudiants de la fin du xxi^e siècle que les catégories ordinaires le sont aujourd'hui. Rappelons que l'axiome clé dans une catégorie ordinaire est l'existence d'une transformation composée unique $g \circ f: X \rightarrow Z$ pour toute paire de transformations composables $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$. Cette

L'INFINI-GROUPOÏDE FONDAMENTAL



composée est un élément dans l'espace de toutes les transformations allant de X à Z . De même, dans une infini-catégorie, il existe tout un espace des flèches menant de X à Z qui, dans le cas d'un infini-groupeïde fondamental, peut être vu, en quelque sorte, comme un «espace de chemins». L'analogue pertinent de l'unicité des composées dans les catégories ordinaires est l'axiome selon lequel, dans une infini-catégorie, l'espace formé de toutes les composées de f et g est contractile, ce qui signifie qu'on peut ramener continûment tous ses points sur une seule origine à la façon d'un «Big Bang inversé».

Notons que le caractère contractile de l'espace des composées n'implique pas qu'il existe une unique composée: par exemple, dans le cas d'un infini-groupeïde fondamental, il peut y en avoir un grand nombre. Mais le caractère contractile garantit que deux composées différentes soient homotopes, et que deux homotopies différentes reliant ces composées soient reliées par une homotopie supérieure, etc.



Dans un espace contractile, on peut ramener tous les points sur une seule origine, à la façon d'un Big Bang inversé

