

Toujours comme dans une catégorie ordinaire, il existe une composition entre des flèches de même dimension: si on a deux flèches $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$, alors il doit aussi exister une flèche $g \circ f: X \rightarrow Z$. Tout semble bien fonctionner, mais attention, une subtilité technique complexifie ici la situation. En effet, pour définir l'infini-groupeïde fondamental d'une façon utile, il est nécessaire d'affaiblir les axiomes sur la composition. Plus précisément, pour toute paire de flèches composables, on demande qu'il existe toujours une composition, mais elle n'est pas forcément unique: elle n'est unique qu'à homotopie supérieure près, ce qui signifie concrètement que deux compositions de f et g sont forcément reliées par une homotopie supérieure.

Ce défaut d'unicité fait qu'il est difficile de définir les infini-catégories en utilisant seulement les fondements classiques des mathématiques qui reposent sur la théorie des ensembles, car la composition ne se comporte plus exactement comme les opérations qui apparaissent dans l'algèbre universelle. En conséquence, bien que les infini-catégories soient de plus en plus au cœur de la recherche moderne dans de nombreux domaines des mathématiques, de la théorie quantique des champs à la géométrie algébrique en passant par la topologie algébrique, elles sont souvent considérées comme trop difficiles à définir et à manipuler par la plupart des mathématiciens qui n'en sont pas spécialistes. Elles sont d'ailleurs rarement enseignées aux étudiants.

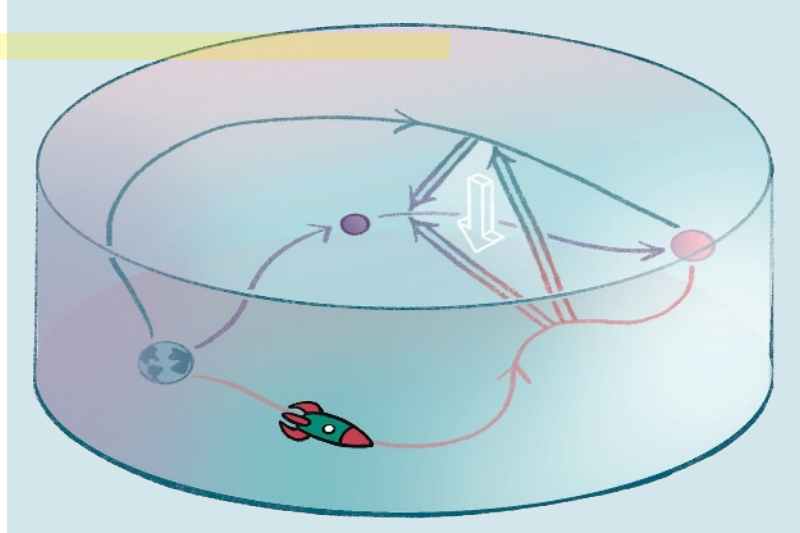
DE NOUVELLES CONNEXIONS

Néanmoins, comme beaucoup d'autres, je vois les infini-catégories comme des constructions tout à fait novatrices permettant aux mathématiciens d'envisager de nouvelles connexions entre des objets ou des théorèmes qu'il aurait été, autrement, impossible d'énoncer ou de démontrer rigoureusement.

L'expérience historique suggère que les mathématiques les plus exotiques aujourd'hui finiront par être vues comme simples et par être enseignées à la plupart des futurs étudiants en mathématiques. En tant que chercheuse en théorie des infini-catégories, je trouve d'ailleurs amusant de spéculer sur la façon dont ce sujet pourrait être simplifié ou rendu plus intuitif.

Une possibilité est que l'on utilisera une ruse langagière, une version généralisée à l'extrême du «le» des catégories (cachant, en fait, un «un») qui pourrait rendre les infini-catégories aussi faciles à appréhender pour les étudiants de la fin du xx^e siècle que les catégories ordinaires le sont aujourd'hui. Rappelons que l'axiome clé dans une catégorie ordinaire est l'existence d'une transformation composée unique $g \circ f: X \rightarrow Z$ pour toute paire de transformations composables $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$. Cette

L'INFINI-GROUPOÏDE FONDAMENTAL



composée est un élément dans l'espace de toutes les transformations allant de X à Z . De même, dans une infini-catégorie, il existe tout un espace des flèches menant de X à Z qui, dans le cas d'un infini-groupeïde fondamental, peut être vu, en quelque sorte, comme un «espace de chemins». L'analogue pertinent de l'unicité des composées dans les catégories ordinaires est l'axiome selon lequel, dans une infini-catégorie, l'espace formé de toutes les composées de f et g est contractile, ce qui signifie qu'on peut ramener continûment tous ses points sur une seule origine à la façon d'un «Big Bang inversé».

Notons que le caractère contractile de l'espace des composées n'implique pas qu'il existe une unique composée: par exemple, dans le cas d'un infini-groupeïde fondamental, il peut y en avoir un grand nombre. Mais le caractère contractile garantit que deux composées différentes soient homotopes, et que deux homotopies différentes reliant ces composées soient reliées par une homotopie supérieure, etc.

Dans un espace contractile, on peut ramener tous les points sur une seule origine, à la façon d'un Big Bang inversé

Dans un essai publié en 1974, le mathématicien britannique Michael Atiyah écrivait : « Le but des théories scientifiques est d'organiser méthodiquement l'expérience passée, de sorte que les générations suivantes, nos étudiants, leurs étudiants à eux, et ainsi de suite, soient en mesure d'en comprendre les aspects les plus essentiels de la façon la plus indolore possible, et c'est le seul moyen de poursuivre la construction cumulative de toute activité scientifique sans aboutir à une impasse. » La théorie des catégories joue sans aucun doute ce rôle dans les mathématiques modernes ; si les mathématiques sont la science de l'analogie – l'étude des motifs qui se répètent –, alors la théorie des catégories est l'étude des modèles de pensée mathématique – les « mathématiques des mathématiques », pour reprendre les mots d'Eugenia Cheng.

LES OUTILS DE DEMAIN

Si les chercheurs sont aujourd'hui capables de manipuler autant d'idées et de notions différentes, c'est parce que notre compréhension de nombreux concepts mathématiques a été simplifiée par l'abstraction. Cette dernière agit comme un processus consistant à prendre du

recul par rapport à chaque problème précis et à adopter une vision plus large des mathématiques. À de hauts niveaux d'abstraction, beaucoup de détails fins sont invisibles, mais, de façon remarquable, certains théorèmes d'algèbre, de théorie des ensembles, de topologie ou de géométrie algébrique sont parfois vrais pour une même raison plus fondamentale, et, lorsque c'est le cas, leurs preuves peuvent s'écrire dans le langage de la théorie des catégories.

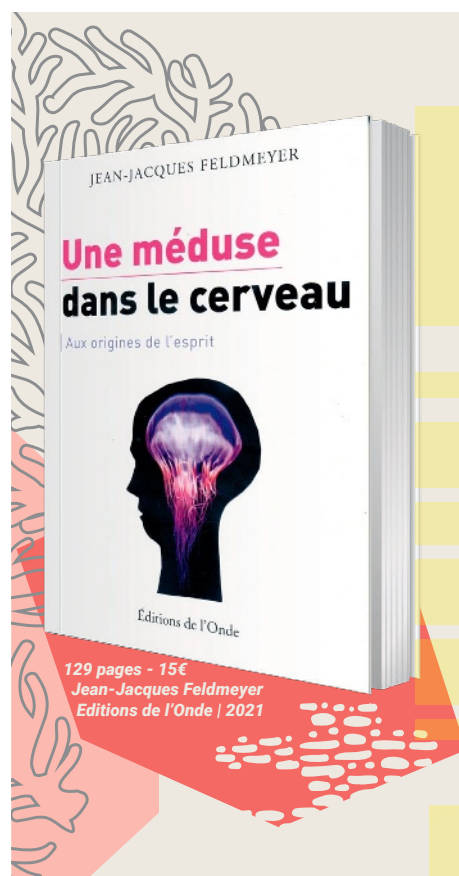
Qu'est-ce qui attend les mathématiciens du futur ? Le consensus naissant, dans certains domaines des mathématiques, est que les objets mathématiques du xx^e siècle se définiront de façon plus naturelle dans le monde des infini-catégories, de la même manière que les catégories ordinaires sont un langage pertinent pour les objets mathématiques du xx^e siècle. Certains mathématiciens nourrissent l'espoir que l'empilement vertigineux de flèches en toute dimension qui habite les infini-catégories sera relégué à l'arrière-plan dans l'inconscient collectif en mathématiques, chaque espace de choix contractile étant « vu » comme un seul point. Et on ne peut que s'interroger : si tant de progrès ont eu lieu au xx^e siècle, où en seront les mathématiques à la fin du nôtre ? ■

BIBLIOGRAPHIE

E. Riehl et D. Verity, **Infinity category theory from scratch**, prépublication arXiv, 2016 (<https://arxiv.org/abs/1608.05314>).

E. Cheng, **Comment cuire un 9 ?**, Flammarion, 2016.

J. Baez, **An introduction to n-categories**, dans E. Moggi et G. Rosolini (éd.), *Category Theory and Computer Science*, Springer, 1997.



Une méduse dans le cerveau

Aux origines de l'esprit

Une approche nouvelle du cerveau

Les fonctions cérébrales, sous l'essor des neurosciences, apparaissent comme des mécanismes de plus en plus complexes. Pour autant, les fonctions dites « supérieures » telles que la conscience ou la créativité restent mystérieuses.

L'originalité de cet essai est de tenter une approche différente du système nerveux dans une perspective évolutive et d'esquisser l'origine biologique de l'esprit.

L'étude des méduses, par des zoologues au 19^e siècle, a mené à la découverte d'une cellule prodigieuse - le neurone - apparue il y a plus de 600 millions d'années, à l'origine des multiples ébauches de cerveaux et de la diversité des consciences du monde animal.

Le neurone a été le moteur de l'évolution animale. Multipliant les liaisons sensorielles et motrices, il adaptait les mouvements de chaque espèce tout en dressant les cartes de l'environnement, des événements et de ses propres actions.

Son code ? L'ADN, vieux de 3,8 milliards d'années, aux origines de la vie, la vie elle-même.

JEAN-JACQUES FELDMEYER, médecin suisse spécialiste en neurologie, chef de clinique à l'Université de Lausanne puis établi à Delémont. Auteur de nombreuses publications en neurologie, engagé dans l'enseignement, la formation continue et la diffusion des idées dans le domaine des neurosciences, il a déjà publié « Cerveau et pensée - la conquête des neurosciences » (Georg 2002) et « Le cerveau-idées reçues » (Le Cavalier Bleu, 2007).