

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
 P.86 Art & science
 P.88 Idées de physique
 P.92 Chroniques de l'évolution
 P.96 Science & gastronomie
 P.98 À picorer

DES SUITES FRACTALES D'ENTRIERS

Une suite numérique fractale est une suite de nombres dont une partie la reproduit entièrement. La construction de tels objets stimule la créativité de nombreux passionnés.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au
 laboratoire Cristal
 (Centre de recherche
 en informatique, signal
 et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

L'intérêt pour les suites de nombres entiers provient de leur nature concrète et immédiate : tout le monde sait qu'il y a une suite des carrés parfaits (1, 4, 9, 16, 25, ...) et une suite des nombres premiers (2, 3, 5, 7, 11, 13, ...). Leurs termes sont faciles à déterminer et parfois à calculer. De surcroît, ces suites sont, sauf exception, sans limite et elles rendent l'infini immédiat et tangible. Elles suggèrent aux mathématiciens de multiples questions : que deviennent les termes de la suite ? Quelles formules donnent accès directement au n -ième terme, ou à partir du précédent (formules de récurrence) ? Quels liens entretiennent ces suites ? Etc.

Les suites numériques sont parfois étranges, difficiles, voire totalement mystérieuses. Cela explique qu'amateurs et professionnels s'organisent pour collecter, compléter et perfectionner toutes les informations sur ces suites, les algorithmes de calculs qui les produisent, les démonstrations de leurs propriétés. L'encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane (<https://oeis.org>) est la principale source d'information sur le sujet.

En relation avec l'encyclopédie, un groupe de passionnés ouvert à tous communique via la « Sequence Fans Mailing List » (<http://list.seqfan.eu>). Il existe aussi une revue spécialisée de mathématiques (*Journal of Integer Sequences*) qui collecte les résultats non triviaux concernant le sujet, et, bien sûr, des livres et quelques vidéos.

J'ai sélectionné plusieurs suites illustrant ce qui retient l'attention et justifie qu'on les examine de près. Les suites fractales sont le fil directeur de notre voyage.

LES SUITES FRACTALES

Comme les images ou les sculptures fractales qui contiennent en elles-mêmes leur dessin ou leur forme, une suite fractale est une suite dont une partie d'elle-même redonne la suite à l'identique. On qualifie aussi une telle suite d'« autoréférente », d'« autodescriptive », ou d'« autosemblable ». Plusieurs définitions plus ou moins restrictives sont possibles. Commençons par la plus tolérante.

Une suite numérique (x_n) est fractale s'il existe un opérateur T , différent de l'identité, $T(x_n) \rightarrow (t_n)$ qui, partant de (x_n) , redonne (x_n) , c'est-à-dire $T(x_n) = (x_n)$. On dit aussi que (x_n) est un point fixe de l'opérateur T .

Plus la suite (x_n) sera alambiquée ou inattendue et plus l'opérateur T sera simple (sans être l'opérateur identité), plus la nature fractale de la suite nous étonnera et plus il sera intéressant d'explorer ses propriétés. Voyons des suites connues qui satisfont la définition.

La suite $(x_n) = (2^n) = (1, 2, 4, 8, 16, \dots)$ est fractale car c'est un point fixe de l'opérateur T_1 qui enlève le premier terme de la suite et divise tous les termes par 2 : $t_n = x_{n+1}/2$. On peut aussi considérer l'opérateur T_2 , inverse du premier : il double chaque terme et ajoute le terme 1 devant

C'est peut-être un peu trop facile car, pour toute suite donnée (x_n) , en prenant un opérateur T assez compliqué et bien adapté, on pourra faire de (x_n) un point fixe de T , ce qui permettra de dire que (x_n) est fractale: nous

Pour cette même suite, on peut d'ailleurs considérer l'opérateur T qui retient deux termes consécutifs et en abandonne deux, et recommence indéfiniment. Plus généralement, si p et k sont deux entiers non nuls fixés, l'opérateur d'extraction T qui retient $2p$ termes consécutifs et en abandonne $2k$, puis recommence, fait de notre suite une suite fractale au sens de l'extraction. Le même genre de considérations montre que toute

© Creative Commons Zero, Public Domain Dedication