

1

le résultat: $t_0 = 1, t_n = 2x_{n-1}$. Plus simple encore, il y a l'opérateur T_3 qui prend la différence de deux termes consécutifs: $t_n = x_{n+1} - x_n$, car $2^{n+1} - 2^n = 2^n$. Ces trois opérateurs transforment (2^n) en elle-même: $T_1(2^n) = T_2(2^n) = T_3(2^n) = (2^n)$.

Vous imaginerez sans mal des opérateurs qui font de (3^n) une suite fractale, et d'autres qui, pour un entier k fixé, font de (k^n) une suite fractale. Plus généralement encore, toutes les suites qu'on définit par une relation de récurrence, c'est-à-dire $x_n = f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$, sont des suites fractales. On prend pour T l'opérateur qui à (x_n) associe la suite $t_n = f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. Ainsi, la suite de Fibonacci ($F_0 = F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n > 1$) est fractale: en prenant $T_4(x_n) = x_{n-1} + x_{n-2}$ et en précisant que T_4 fixe les deux premiers termes $t_0 = t_1 = 1$, on a bien: $T_4(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$.

C'est peut-être un peu trop facile car, pour toute suite donnée (x_n) , en prenant un opérateur T assez compliqué et bien adapté, on pourra faire de (x_n) un point fixe de T , ce qui permettra de dire que (x_n) est fractale: nous

avons précisé que les suites fractales ne sont intéressantes que lorsque T est simple.

FRACTALE PAR L'EXTRACTION

Une définition un peu plus restrictive exige que T soit un opérateur qui extrait une sous-suite. Nous parlerons de suites «fractales au sens de l'extraction». Les plus simples de cette catégorie sont les suites périodiques. Prenons par exemple $(x_n) = (1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$. Si T est l'opérateur d'extraction qui retient un terme sur trois, $T(x_n) = (x_{3n})$, on a bien: $T(1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots) = (1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$.

Pour cette même suite, on peut d'ailleurs considérer l'opérateur T qui retient deux termes consécutifs et en abandonne deux, et recommence indéfiniment. Plus généralement, si p et k sont deux entiers non nuls fixés, l'opérateur d'extraction T qui retient $2p$ termes consécutifs et en abandonne $2k$, puis recommence, fait de notre suite une suite fractale au sens de l'extraction. Le même genre de considérations montre que toute

PROUHET, LES ÉCHECS, LE SHOGI, LE FOOTBALL ET LE TENNIS

La suite de Prouhet, ou suite de Prouhet-Thue-Morse, est fractale au sens de l'extraction car, en n'en retenant qu'un terme sur deux, on la retrouve exactement. Il en est de même en ne retenant qu'un terme sur quatre, un terme sur huit, etc. comme le montre le schéma ci-contre.

On a prouvé que jamais on n'y rencontre trois fois consécutivement la même séquence. Il n'y a donc jamais trois 0 consécutifs, trois 1 consécutifs, trois fois 01 à la suite, etc. Cette propriété a conduit à sa redécouverte en plusieurs occasions.

Le grand maître d'échecs Max Euwe, champion du monde de 1935 à 1937, et professeur de mathématiques, redécouvrit la suite de Prouhet à propos d'une règle du jeu d'échecs. Selon cette règle, la partie est déclarée nulle si la même suite de mouvements est répétée trois fois.

Euwe associa au 0 de la suite la séquence de quatre mouvements (Cg1-f3, Cg8-f6, Cf3-g1, Cf6-g8) et au 1 la séquence (Cb1-c3, Cb8-c6, Cc3-b1, Cc6-b8). Les deux adversaires peuvent alors jouer indéfiniment sans que la partie soit nulle.

Dans le cas du shogi, la forme japonaise de notre jeu d'échecs, la suite de Prouhet a conduit à une modification des règles du jeu. Lors d'une partie disputée en mars 1983 entre les deux champions professionnels Kunio Yonenaga et Kōji Tanigawa, au coup 118, Tanigawa était dans une position inférieure. La règle alors en vigueur indiquait que si une séquence de coups

```
01101001100101101001011001101001100110100110100110100110100110
0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 1 0 1
0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1
0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1
0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1
0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1
0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1
```

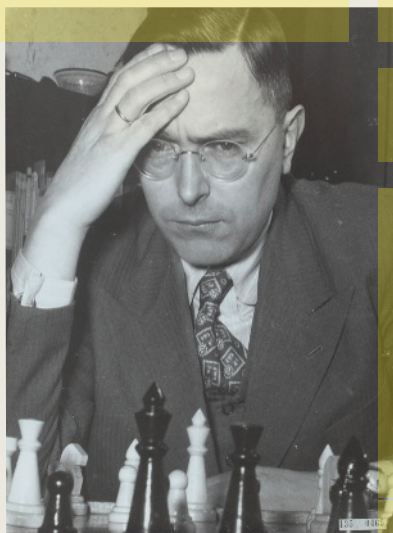
se répète trois fois de suite, la partie est nulle. Yonenaga disposait de deux manières équivalentes de jouer. Il les utilisa en suivant le schéma de la suite de Prouhet (qu'il exploita non pas à partir du début, mais à partir d'un terme plus avancé), ce qui fit durer la partie et lui donna le temps d'analyser

soigneusement la configuration de jeu. Au bout d'une soixantaine de coups, Tanigawa comprit ce qui se passait et cassa lui-même la série. Il était malheureusement trop tard pour lui et Yonenaga finit par l'emporter (voir https://www.youtube.com/watch?v=7SZpI_a4aC0).

Deux mois plus tard, la règle des trois séquences consécutives fut modifiée et aujourd'hui une partie de shogi est déclarée nulle dès qu'une position apparaît pour la quatrième fois.

Au football, la statistique des séances de tirs au but montre que l'équipe effectuant le premier tir est avantagée à cause de la pression psychologique plus forte sur la seconde équipe que sur la première. Ignacio Palacios-Huerta, un économiste espagnol, a suggéré de faire tirer les buts en suivant le schéma de la suite de Prouhet pour les huit premiers tirs, ABBABAAB, puis de poursuivre en répétant périodiquement le schéma. Selon lui, l'avantage de plus de 60 % pour la première équipe avec la méthode actuelle serait presque annulé.

Au tennis, lors d'un jeu décisif (tie break), le service est attribué selon l'ordre ABBAABBAAB... qui ne suit la suite de Prouhet que pendant quatre coups.



Max Euwe (1901-1981)

2



Neil Sloane
en 2016.

UN JEU AVEC L'ENCYCLOPÉDIE DE NEIL SLOANE

Le jeu consiste à imaginer des suites aussi simples que possible qui ne sont pas dans l'encyclopédie des suites de Neil Sloane. Celle-ci ne contient qu'un peu plus de 300 000 suites jugées intéressantes. Il est donc facile d'imaginer des suites compliquées que l'on n'y trouvera pas. Par exemple, on peut proposer des suites de la forme (k^n) pour un k fixé. On découvrira que les suites (2^n) , (3^n) , (4^n) , ..., (50^n) sont présentes, mais que (51^n) est absente (le 29/09/2021). Le jeu n'est amusant que si l'on cherche des suites faciles à décrire, ou fondées sur une idée simple. Voici quelques exemples (absents de l'encyclopédie au 11/11/2021). La plupart des suites proposées ici sont si simples qu'une personne attentive identifierait la règle qui les définit.

a) On compte jusqu'au nombre premier 2, et l'on recommence pour le nombre premier 3, puis 5, puis 7, etc. : (0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...).

b) Pour $n = 0, 1, 2, \dots$, on part du nombre premier p_n ($p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, p_3 = 7, p_4 = 11, \dots$) et l'on décroît unité par unité n fois de suite : (2, 3, 2, 5, 4, 3, 7, 6, 5, 4, 11, 10, 9, 8, 7, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 17, ...).

c) On part de la suite des nombres premiers, on garde le premier, on en supprime $2 = p_0$, on en garde un, on en supprime $3 = p_1$, on en garde un, on en supprime $5 = p_2$, on en garde un, on en supprime $7 = p_3$, on en garde un, etc. : (2, 7, 19, 43, 79, 139, 223, ...).

d) Les nombres premiers auxquels on ajoute 1 une fois sur deux : (3, 3, 6, 7, 12, 13, 18, 19, 24, 29, 32, 37, 42, 43, 48, 53, 60, 61, 68, ...).

e) On part de 2, on y reste 2 fois de suite, on ajoute 3, on y reste 3 fois, on

ajoute 5 et on y reste 5 fois, on ajoute 7
et on y reste 7 fois, on ajoute 11, etc.
(en utilisant les nombres premiers) :
(2, 2, 5, 5, 5, 10, 10, 10, 10, 10, 17, 17, 17,
17, 17, 17, 17, 28, ...).

f) Les nombres premiers élevés au carré une fois sur deux :

(4, 3, 25, 7, 121, 13, 289, 19, 529, 29, 961, 37, 1 681, 43, 2 209, 53, 3 481, 61, 4 489, 71, ...).

g) 2 fois le 0, puis 3 fois le 1, puis 5 fois le 2, puis 7 fois le 3, puis 11 fois le 4, ..., puis p_n fois le n , ...
(0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, ...).

h) On modifie la notion de signature (*voir le texte*) en prenant non pas les i , mais les j . Avec cette notion, la suite associée au nombre réel e est :

(1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2,
1, 4, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 5, 1, 4, 3, 2,
5, 1, 4, 3, 2, 5, 1, 4, 3, 6, 2, 5, 1, 4, 3, 6, 2,
5, 1, 4, 3, 6, 2, 5, 1, 4, 7, 3, 6, 2, 5, 1, 4, 7, 6,
3, 6, 2, 5, 1, 4, 7, 3, 6, 2, 5, 1, 8, 4, 7, 3, 6,
2, 5, 1, 8, 4, 7, 3, 6, 2, 5, 1, 8, 4, 7, 3, ...).

i) Pour finir, voici une suite fondée sur l'encyclopédie elle-même. On interroge celle-ci sur les suites commençant par 0, 1, X jusqu'à trouver un X tel qu'elle répond qu'elle ne connaît pas de suite commençant par 0, 1, X. On trouve que c'est 142. On recommence avec 0, 1, 2, Y et l'on trouve que c'est $Y = 26$, etc. : (142, 26, 26, 21, 14, 14, 18, 22, 26, 15, 17, 17, ...).

Cette suite est bien évidemment nulle à partir d'un certain moment. Bien qu'amusante, la suite est appelée à évoluer quand de nouvelles suites seront ajoutées ; elle n'intéressera donc pas l'encyclopédie !

suite périodique est, d'une multitude de façons, fractale au sens de l'extraction.

Bien moins évidente est la suite de Prouhet-Thue-Morse (p_n) déjà mentionnée plusieurs fois dans la rubrique. Elle a été introduite en 1851 par le Français Eugène Prouhet. Notons au passage qu'il est surprenant qu'on la nomme ainsi alors qu'on devrait la nommer

simplement « suite de Prouhet ». Plus surprenant encore est le fait que, dans Wikipedia en langue anglaise, l'article consacré à la suite s'intitule « Thue-Morse sequence », ce qui est aussi le nom retenu dans l'encyclopédie de Neil Sloane où elle porte le numéro A010060.

LA SUITE DE PROUHET-THUE-MORSE

Dans cette suite de 0 et de 1, le complément de 0 est 1, et le complément de 1 est 0. Selon la règle définissant la suite, on part de 0, on fait suivre par le complément 1. On obtient (0, 1). On le fait suivre par son complément, qui est (1, 0), pour obtenir (0, 1, 0). Et ainsi de suite. On a donc $(p_n) = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, \dots)$.

La suite (p_n) est remarquable de bien des façons. D'abord, elle est fractale au sens de l'extraction, car c'est un point fixe de l'opérateur très simple T qui prend un terme sur deux, $T(x_n) = (x_{2n})$. Plus étonnant, ce qui reste quand on a extrait un terme sur deux de (p_n) à partir du premier terme est le complément de (p_n) , que nous notons (p_n^c) , soit $(1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$. Autrement dit, (p_n) est point fixe de l'opérateur $T'(x_n) = (x_{2n+1}^c)$.

On écrit $(p_n) = (p_n^a) + (p_n^c)$, le «+» désignant ici l'opération d'insertion l'une dans l'autre des deux suites, comme quand on fait des mélanges de cartes en mitraille: $(a_0, b_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) = (a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots)$.

En utilisant deux fois l'opérateur T qui extrait un terme sur deux, prendre un terme sur quatre de (p_n) redonne (p_n) , et bien sûr, en recommençant, prendre un terme sur 2^k (où k est un entier positif fixé) redonne (p_n) .

La suite (p_n) est fractale dans un autre sens encore. Si l'on considère l'opérateur T consistant à remplacer chaque 0 par (0, 1) et chaque 1 par (1, 0) – on désigne par «morphisme» ce type d'opérateur –, on a : $T(p_n) = (p_n)$. L'opérateur inverse qui remplace chaque (0, 1) par 0 et chaque (1, 0) par 1 admet encore (p_n) comme point fixe, qui est donc fractale une fois de plus.

Citons quelques propriétés de (p_n) .

Le terme p_n est la parité du nombre de 1 dans l'écriture binaire de n . Cela permet de connaître facilement le n -ième terme de (p_n) . Par exemple, 5000000 s'écrit en binaire 10011000100101101000000, qui comporte huit fois le 1; cela signifie que $p_{5000000}=0$.

La suite (p_n) ne contient jamais trois fois consécutivement la même séquence de 0 et de 1 : on dit que (p_n) est « sans cube ». Cette propriété est intéressante pour les échecs, où il est interdit de faire trois fois la même chose (voir l'encadré 1).

La suite (p_n) produit un nombre transcendant (c'est-à-dire qui n'est solution d'aucune