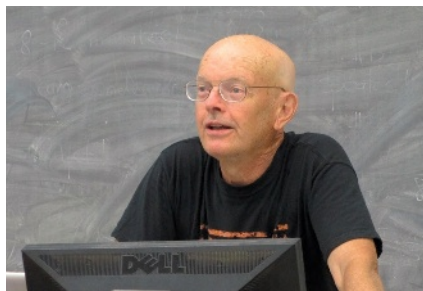


2

Neil Sloane
en 2016.

UN JEU AVEC L'ENCYCLOPÉDIE DE NEIL SLOANE

Le jeu consiste à imaginer des suites aussi simples que possible qui ne sont pas dans l'encyclopédie des suites de Neil Sloane. Celle-ci ne contient qu'un peu plus de 300 000 suites jugées intéressantes. Il est donc facile d'imaginer des suites compliquées que l'on n'y trouvera pas. Par exemple, on peut proposer des suites de la forme (k^n) pour un k fixé. On découvrira que les suites (2^n) , (3^n) , (4^n) , ..., (50^n) sont présentes, mais que (51^n) est absente (le 29/09/2021). Le jeu n'est amusant que si l'on cherche des suites faciles à décrire, ou fondées sur une idée simple. Voici quelques exemples (absents de l'encyclopédie au 11/11/2021). La plupart des suites proposées ici sont si simples qu'une personne attentive identifierait la règle qui les définit.

a) On compte jusqu'au nombre premier 2, et l'on recommence pour le nombre premier 3, puis 5, puis 7, etc. : (0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...).

b) Pour $n = 0, 1, 2, \dots$, on part du nombre premier p_n ($p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, p_3 = 7, p_4 = 11, \dots$) et l'on décroît unité par unité n fois de suite : (2, 3, 2, 5, 4, 3, 7, 6, 5, 4, 11, 10, 9, 8, 7, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 17, ...).

c) On part de la suite des nombres premiers, on garde le premier, on en supprime $2 = p_0$, on en garde un, on en supprime $3 = p_1$, on en garde un, on en supprime $5 = p_2$, on en garde un, on en supprime $7 = p_3$, on en garde un, etc. : (2, 7, 19, 43, 79, 139, 223, ...).

d) Les nombres premiers auxquels on ajoute 1 une fois sur deux : (3, 3, 6, 7, 12, 13, 18, 19, 24, 29, 32, 37, 42, 43, 48, 53, 60, 61, 68, ...).

e) On part de 2, on y reste 2 fois de suite, on ajoute 3, on y reste 3 fois, on

ajoute 5 et on y reste 5 fois, on ajoute 7 et on y reste 7 fois, on ajoute 11, etc. (en utilisant les nombres premiers) : (2, 2, 5, 5, 5, 10, 10, 10, 10, 17, 17, 17, 17, 17, 28, ...).

f) Les nombres premiers élevés au carré une fois sur deux : (4, 3, 25, 7, 121, 13, 289, 19, 529, 29, 961, 37, 1 681, 43, 2 209, 53, 3 481, 61, 4 489, 71, ...).

g) 2 fois le 0, puis 3 fois le 1, puis 5 fois le 2, puis 7 fois le 3, puis 11 fois le 4, ..., puis p_n fois le n , ... (0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, ...).

h) On modifie la notion de signature (voir le texte) en prenant non pas les i , mais les j . Avec cette notion, la suite associée au nombre réel e est : (1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 5, 1, 4, 3, 2, 5, 1, 4, 3, 6, 2, 5, 1, 4, 3, 6, 2, 5, 1, 4, 7, 3, 6, 2, 5, 1, 4, 7, 3, 6, 2, 5, 1, 4, 7, 3, 6, 2, 5, 1, 8, 4, 7, 3, 6, 2, 5, 1, 8, 4, 7, 3, ...).

i) Pour finir, voici une suite fondée sur l'encyclopédie elle-même. On interroge celle-ci sur les suites commençant par 0, 1, X jusqu'à trouver un X tel qu'elle répond qu'elle ne connaît pas de suite commençant par 0, 1, X . On trouve que c'est 142. On recommence avec 0, 1, 2, Y et l'on trouve que c'est $Y = 26$, etc. : (142, 26, 26, 21, 14, 14, 18, 22, 26, 15, 17, 17, ...).

Cette suite est bien évidemment nulle à partir d'un certain moment. Bien qu'amusante, la suite est appelée à évoluer quand de nouvelles suites seront ajoutées ; elle n'intéressera donc pas l'encyclopédie !

simplement « suite de Prouhet ». Plus surprenant encore est le fait que, dans Wikipedia en langue anglaise, l'article consacré à la suite s'intitule « Thue-Morse sequence », ce qui est aussi le nom retenu dans l'encyclopédie de Neil Sloane où elle porte le numéro A010060.

LA SUITE DE PROUHET-THUE-MORSE

Dans cette suite de 0 et de 1, le complément de 0 est 1, et le complément de 1 est 0. Selon la règle définissant la suite, on part de 0, on fait suivre par le complément 1. On obtient (0, 1). On le fait suivre par son complément, qui est (1, 0), pour obtenir (0, 1, 1, 0). Et ainsi de suite. On a donc $(p_n) = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$.

La suite (p_n) est remarquable de bien des façons. D'abord, elle est fractale au sens de l'extraction, car c'est un point fixe de l'opérateur très simple T qui prend un terme sur deux, $T(x_n) = (x_{2n})$. Plus étonnant, ce qui reste quand on a extrait un terme sur deux de (p_n) à partir du premier terme est le complément de (p_n) , que nous notons (p_n^c) , soit (1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, ...). Autrement dit, (p_n) est point fixe de l'opérateur $T'(x_n) = (x_{2n+1}^c)$.

On écrit $(p_n) = (p_n) + (p_n^c)$, le « + » désignant ici l'opération d'insertion l'une dans l'autre des deux suites, comme quand on fait des mélanges de cartes en mitraille : $(a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) = (a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots)$.

En utilisant deux fois l'opérateur T qui extrait un terme sur deux, prendre un terme sur quatre de (p_n) redonne (p_n) , et bien sûr, en recommençant, prendre un terme sur 2^k (où k est un entier positif fixé) redonne (p_n) .

La suite (p_n) est fractale dans un autre sens encore. Si l'on considère l'opérateur T consistant à remplacer chaque 0 par (0, 1) et chaque 1 par (1, 0) – on désigne par « morphisme » ce type d'opérateur –, on a : $T(p_n) = (p_n)$. L'opérateur inverse qui remplace chaque (0, 1) par 0 et chaque (1, 0) par 1 admet encore (p_n) comme point fixe, qui est donc fractale une fois de plus.

Citons quelques propriétés de (p_n) .

Le terme p_n est la parité du nombre de 1 dans l'écriture binaire de n . Cela permet de connaître facilement le n -ième terme de (p_n) . Par exemple, 5 000 000 s'écrit en binaire 10011000100101101000000, qui comporte huit fois le 1 ; cela signifie que $p_{5\,000\,000} = 0$.

La suite (p_n) ne contient jamais trois fois consécutivement la même séquence de 0 et de 1 : on dit que (p_n) est « sans cube ». Cette propriété est intéressante pour les échecs, où il est interdit de faire trois fois la même chose (voir l'encadré 1).

La suite (p_n) produit un nombre transcendant (c'est-à-dire qui n'est solution d'aucune

suite périodique est, d'une multitude de façons, fractale au sens de l'extraction.

Bien moins évidente est la suite de Prouhet-Thue-Morse (p_n) déjà mentionnée plusieurs fois dans la rubrique. Elle a été introduite en 1851 par le Français Eugène Prouhet. Notons au passage qu'il est surprenant qu'on la nomme ainsi alors qu'on devrait la nommer