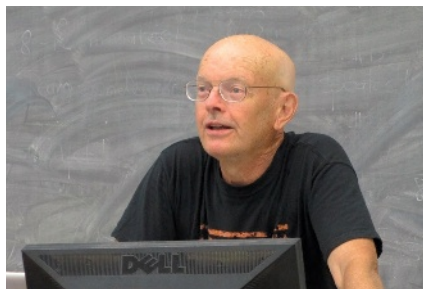


2

Neil Sloane
en 2016.

UN JEU AVEC L'ENCYCLOPÉDIE DE NEIL SLOANE

Le jeu consiste à imaginer des suites aussi simples que possible qui ne sont pas dans l'encyclopédie des suites de Neil Sloane. Celle-ci ne contient qu'un peu plus de 300 000 suites jugées intéressantes. Il est donc facile d'imaginer des suites compliquées que l'on n'y trouvera pas. Par exemple, on peut proposer des suites de la forme (k^n) pour un k fixé. On découvrira que les suites (2^n) , (3^n) , (4^n) , ..., (50^n) sont présentes, mais que (51^n) est absente (le 29/09/2021). Le jeu n'est amusant que si l'on cherche des suites faciles à décrire, ou fondées sur une idée simple. Voici quelques exemples (absents de l'encyclopédie au 11/11/2021). La plupart des suites proposées ici sont si simples qu'une personne attentive identifierait la règle qui les définit.

a) On compte jusqu'au nombre premier 2, et l'on recommence pour le nombre premier 3, puis 5, puis 7, etc. : $(0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots)$.

b) Pour $n = 0, 1, 2, \dots$, on part du nombre premier p_n ($p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, p_3 = 7, p_4 = 11, \dots$) et l'on décroît unité par unité n fois de suite : $(2, 3, 2, 5, 4, 3, 7, 6, 5, 4, 11, 10, 9, 8, 7, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 17, \dots)$.

c) On part de la suite des nombres premiers, on garde le premier, on en supprime $2 = p_0$, on en garde un, on en supprime $3 = p_1$, on en garde un, on en supprime $5 = p_2$, on en garde un, on en supprime $7 = p_3$, on en garde un, etc. : $(2, 7, 19, 43, 79, 139, 223, \dots)$.

d) Les nombres premiers auxquels on ajoute 1 une fois sur deux : $(3, 3, 6, 7, 12, 13, 18, 19, 24, 29, 32, 37, 42, 43, 48, 53, 60, 61, 68, \dots)$.

e) On part de 2, on y reste 2 fois de suite, on ajoute 3, on y reste 3 fois, on

ajoute 5 et on y reste 5 fois, on ajoute 7 et on y reste 7 fois, on ajoute 11, etc. (en utilisant les nombres premiers) : $(2, 2, 5, 5, 5, 10, 10, 10, 10, 10, 17, 17, 17, 17, 17, 28, \dots)$.

f) Les nombres premiers élevés au carré une fois sur deux :

$(4, 3, 25, 7, 121, 13, 289, 19, 529, 29, 961, 37, 1\ 681, 43, 2\ 209, 53, 3\ 481, 61, 4\ 489, 71, \dots)$.

g) 2 fois le 0, puis 3 fois le 1, puis 5 fois le 2, puis 7 fois le 3, puis 11 fois le 4, ..., puis p_n fois le n , ...
 $(0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, \dots)$.

h) On modifie la notion de signature (voir le texte) en prenant non pas les i , mais les j . Avec cette notion, la suite associée au nombre réel e est :

$(1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 5, 1, 4, 3, 2, 5, 1, 4, 3, 2, 5, 1, 4, 3, 6, 2, 5, 1, 4, 3, 6, 2, 5, 1, 4, 3, 6, 2, 5, 1, 4, 7, 3, 6, 2, 5, 1, 4, 7, 3, 6, 2, 5, 1, 4, 7, 3, 6, 2, 5, 1, 8, 4, 7, 3, 6, 2, 5, 1, 8, 4, 7, 3, 6, 2, 5, 1, 8, 4, 7, 3, 6, 2, 5, 1, 8, 4, 7, 3, \dots)$.

i) Pour finir, voici une suite fondée sur l'encyclopédie elle-même. On interroge celle-ci sur les suites commençant par 0, 1, X jusqu'à trouver un X tel qu'elle répond qu'elle ne connaît pas de suite commençant par 0, 1, X . On trouve que c'est 142. On recommence avec 0, 1, 2, Y et l'on trouve que c'est $Y = 26$, etc. : $(142, 26, 26, 21, 14, 14, 18, 22, 26, 15, 17, 17, \dots)$.

Cette suite est bien évidemment nulle à partir d'un certain moment. Bien qu'amusante, la suite est appelée à évoluer quand de nouvelles suites seront ajoutées ; elle n'intéressera donc pas l'encyclopédie !

suite périodique est, d'une multitude de façons, fractale au sens de l'extraction.

Bien moins évidente est la suite de Prouhet-Thue-Morse (p_n) déjà mentionnée plusieurs fois dans la rubrique. Elle a été introduite en 1851 par le Français Eugène Prouhet. Notons au passage qu'il est surprenant qu'on la nomme ainsi alors qu'on devrait la nommer

simplement « suite de Prouhet ». Plus surprenant encore est le fait que, dans Wikipedia en langue anglaise, l'article consacré à la suite s'intitule « Thue-Morse sequence », ce qui est aussi le nom retenu dans l'encyclopédie de Neil Sloane où elle porte le numéro A010060.

LA SUITE DE PROUHET-THUE-MORSE

Dans cette suite de 0 et de 1, le complément de 0 est 1, et le complément de 1 est 0. Selon la règle définissant la suite, on part de 0, on fait suivre par le complément 1. On obtient $(0, 1)$. On le fait suivre par son complément, qui est $(1, 0)$, pour obtenir $(0, 1, 1, 0)$. Et ainsi de suite. On a donc $(p_n) = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$.

La suite (p_n) est remarquable de bien des façons. D'abord, elle est fractale au sens de l'extraction, car c'est un point fixe de l'opérateur très simple T qui prend un terme sur deux, $T(x_n) = (x_{2n})$. Plus étonnant, ce qui reste quand on a extrait un terme sur deux de (p_n) à partir du premier terme est le complément de (p_n) , que nous notons (p_n^c) , soit $(1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$. Autrement dit, (p_n) est point fixe de l'opérateur $T^*(x_n) = (x_{2n+1}^c)$.

On écrit $(p_n) = (p_n) + (p_n^c)$, le « + » désignant ici l'opération d'insertion l'une dans l'autre des deux suites, comme quand on fait des mélanges de cartes en mitraille : $(a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) = (a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots)$.

En utilisant deux fois l'opérateur T qui extrait un terme sur deux, prendre un terme sur quatre de (p_n) redonne (p_n) , et bien sûr, en recommençant, prendre un terme sur 2^k (où k est un entier positif fixé) redonne (p_n) .

La suite (p_n) est fractale dans un autre sens encore. Si l'on considère l'opérateur T consistant à remplacer chaque 0 par $(0, 1)$ et chaque 1 par $(1, 0)$ – on désigne par « morphisme » ce type d'opérateur –, on a : $T(p_n) = (p_n)$. L'opérateur inverse qui remplace chaque $(0, 1)$ par 0 et chaque $(1, 0)$ par 1 admet encore (p_n) comme point fixe, qui est donc fractale une fois de plus.

Citons quelques propriétés de (p_n) .

Le terme p_n est la parité du nombre de 1 dans l'écriture binaire de n . Cela permet de connaître facilement le n -ième terme de (p_n) . Par exemple, 5 000 000 s'écrit en binaire 10011000100101101000000, qui comporte huit fois le 1 ; cela signifie que $p_{5\,000\,000} = 0$.

La suite (p_n) ne contient jamais trois fois consécutivement la même séquence de 0 et de 1 : on dit que (p_n) est « sans cube ». Cette propriété est intéressante pour les échecs, où il est interdit de faire trois fois la même chose (voir l'encadré 1).

La suite (p_n) produit un nombre transcendant (c'est-à-dire qui n'est solution d'aucune

3

SIGNATURE ET SUITES DOUBLEMENT FRACTALES

Soit r un nombre réel positif. On considère les nombres de la forme $i + (j \times r)$ où i et j sont des entiers positifs. On les classe par ordre croissant. En ne lisant que le i des nombres classés, on a une suite infinie d'entiers qui est la « signature du nombre r ».

Exemple avec $r = \sqrt{2}$. On considère tous les nombres de la forme $i + j\sqrt{2}$ avec i et j entiers :

$1 + \sqrt{2} = 2,414\ 213\dots$, $1 + 2\sqrt{2} = 3,828\ 427\dots$,

$2 + \sqrt{2} = 3,414\ 213\dots$, $2 + 2\sqrt{2} = 4,828\ 427\dots$,
 $3 + \sqrt{2} = 4,414\ 213\dots$, etc.

On les classe par ordre croissant :

$1 + \sqrt{2} = 2,414\ 213\dots$, $2 + \sqrt{2} = 3,414\ 213\dots$,
 $1 + 2\sqrt{2} = 3,828\ 427\dots$, $3 + \sqrt{2} = 4,414\ 213\dots$,
 $2 + 2\sqrt{2} = 4,828\ 427\dots$, etc.

On considère la suite constituée des i (en rouge). Cela donne (1, 2, 1, 3, 2, ...) et, en menant le calcul plus loin :

(1, 2, 1, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 5, 1, 4, 3, 6, 2, 5, 1, 4, 7, 3, 6, 2, 5, 8, 1, 4, 7, 3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7, 10, 3,

6, 9, 2, 5, 8, 1, 11, 4, 7, 10, 3, 6, ...) (c'est la suite A007336 de l'encyclopédie).

Cette suite, comme toutes celles obtenues par ce procédé à partir d'un nombre réel, est doublement fractale :

- si on enlève les premières occurrences des nombres qui y apparaissent, ce qui reste est la suite elle-même ;
- si on diminue d'une unité chaque terme et qu'on retire les 0 de la suite obtenue, on retombe sur la suite initiale.

équation polynomiale à coefficients entiers) de deux façons :

- en considérant le nombre dont l'écriture binaire des chiffres après la virgule est donnée par la suite: 0,0110100110010110... (voir dans la bibliographie l'article de M. Dekking) ;
- en considérant la fraction continue $f = (a + 1/(b + 1/(b + 1/(a + \dots))))$, les a et b étant deux entiers différents disposés comme les 0 et les 1 de (p_n) (voir l'article de B. Adamczewski et d'Y. Bugeaud).

Une multitude de suites fractales par extraction sont définies en utilisant des morphismes analogues à celui lié à (p_n) . Le morphisme $0 \rightarrow 01, 1 \rightarrow 0$ engendre progressivement la suite dont les premiers termes sont : $M_0 = 0 \rightarrow M_1 = 01 \rightarrow M_2 = 010 \rightarrow M_3 = 01001 \rightarrow M_4 = 01001010 \rightarrow M_5 = 0100101001001 \rightarrow \dots$, qui définit le « mot infini de Fibonacci » (suite A003849 de l'encyclopédie de Neil Sloane). La suite est fractale car, si l'on parcourt la suite en remplaçant chaque 01 par 0 et chaque 0 non suivi d'un 1 par 1, on obtient la suite elle-même. La suite se nomme ainsi car on a $M_n = M_{n-1} * M_{n-2}$ où $*$ désigne l'opération de concaténation ($01 * 0 \rightarrow 010$), ce qui évoque la formule définissant la suite numérique de Fibonacci.

Michael Drmota, Christian Mauduit et Jöel Rivat ont démontré en 2013 l'étrange propriété suivante: en ne retenant que les termes dont les rangs sont des carrés, la sous-suite obtenue est « normale », c'est-à-dire que la fréquence de 1 est $1/2$, la fréquence de 0 est $1/2$, la fréquence de 00 est $1/4$, ..., la fréquence d'une suite de 0 et de 1 de longueur k est $1/2^k$.

LES SUITES HÉSITANTES

Particulièrement intéressantes parmi les suites fractales par extraction sont les suites « hésitantes » (*reluctant* en anglais). La plus simple est $(H_n) = (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots)$, obtenue en comptant jusqu'à 1, puis en comptant de 1 jusqu'à 2, puis en comptant de 1 jusqu'à 3, etc. (suite A002260 dans l'encyclopédie). L'opérateur d'extraction T_a qui transforme une suite numérique en retirant la première occurrence de chaque entier admet (H_n) pour

point fixe: $T_a(H_n) = (H_n)$. Bien sûr, pour tout entier positif fixé k , on peut enlever de la suite les k premières occurrences de chaque entier et ce qui reste est la suite de départ, comme le phénix qui renaît de ses cendres.

Mais la suite (H_n) est fractale dans un autre sens. L'opérateur T_b qui soustrait une unité à chaque terme et ensuite retire tous les 0 a aussi (H_n) comme point fixe: $T_b(H_n) = (H_n)$.

La suite $(2, 2, 3, 2, 3, 5, 2, 3, 5, 7, 2, 3, 5, 7, 11, \dots)$ obtenue comme (H_n) , mais en énumérant les nombres premiers de plus en plus longuement, est aussi fractale au sens de l'extraction, car elle est un point fixe de T_a (c'est la suite A037126). Bien évidemment, en partant de n'importe quelle suite croissante, la même idée donnera une nouvelle suite fractale au sens de l'extraction. La suite $(1, 1, 4, 1, 4, 9, 1, 4, 9, 16, 1, 4, 9, 16, 25, \dots)$ tirée de la suite des carrés est encore l'une d'elles (A133819).

Remarquons que ni la suite hésitante tirée des nombres premiers ni celle tirée des carrés ne sont des points fixes pour T_b . Il y a pourtant une infinité de suites numériques qui sont un point fixe à la fois de T_a et de T_b , et elles sont particulièrement remarquables.

LA SIGNATURE DES NOMBRES RÉELS

Franklin Adams-Watters a proposé de nommer « suites doublement fractales » les suites qui sont un point fixe à la fois de T_a et de T_b . Une caractérisation étonnante et totalement inattendue de ces suites doublement fractales a été démontrée, et cela permet d'en construire une infinité.

Pour tout nombre réel positif r , on considère tous les nombres de la forme $i + (j \times r)$ où i et j sont des entiers positifs; on classe par ordre croissant ces nombres, ce qui donne $i_0 + (j_0 \times r) < i_1 + (j_1 \times r) < i_2 + (j_2 \times r) < \dots$; la suite numérique $(i_0, i_1, i_2, \dots)$ est la « signature » du nombre r (voir un exemple détaillé de cette construction dans l'encadré 3 ci-dessous).

En 2004, Clark Kimberling et John Brown, de l'université d'Evansville, aux États-Unis, ont démontré que toute suite numérique signature