

3

SIGNATURE ET SUITES DOUBLEMENT FRACTALES

Soit r un nombre réel positif. On considère les nombres de la forme $i + (j \times r)$ où i et j sont des entiers positifs. On les classe par ordre croissant. En ne lisant que le i des nombres classés, on a une suite infinie d'entiers qui est la « signature du nombre r ».

Exemple avec $r = \sqrt{2}$. On considère tous les nombres de la forme $i + j\sqrt{2}$ avec i et j entiers :

$1 + \sqrt{2} = 2,414\ 213\dots$, $1 + 2\sqrt{2} = 3,828\ 427\dots$,

$2 + \sqrt{2} = 3,414\ 213\dots$, $2 + 2\sqrt{2} = 4,828\ 427\dots$,
 $3 + \sqrt{2} = 4,414\ 213\dots$, etc.

On les classe par ordre croissant :

$1 + \sqrt{2} = 2,414\ 213\dots$, $2 + \sqrt{2} = 3,414\ 213\dots$,
 $1 + 2\sqrt{2} = 3,828\ 427\dots$, $3 + \sqrt{2} = 4,414\ 213\dots$,
 $2 + 2\sqrt{2} = 4,828\ 427\dots$, etc.

On considère la suite constituée des i (en rouge). Cela donne (1, 2, 1, 3, 2, ...) et, en menant le calcul plus loin :

(1, 2, 1, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 5, 1, 4, 3, 6, 2, 5, 1, 4, 7, 3, 6, 2, 5, 8, 1, 4, 7, 3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7, 10, 3,

6, 9, 2, 5, 8, 1, 11, 4, 7, 10, 3, 6, ...) (c'est la suite A007336 de l'encyclopédie).

Cette suite, comme toutes celles obtenues par ce procédé à partir d'un nombre réel, est doublement fractale :

- si on enlève les premières occurrences des nombres qui y apparaissent, ce qui reste est la suite elle-même ;
- si on diminue d'une unité chaque terme et qu'on retire les 0 de la suite obtenue, on retombe sur la suite initiale.

équation polynomiale à coefficients entiers) de deux façons :

– en considérant le nombre dont l'écriture binaire des chiffres après la virgule est donnée par la suite : 0,0110100110010110... (voir dans la bibliographie l'article de M. Dekking) ;

– en considérant la fraction continue $f = (a + 1/(b + 1/(b + 1/(a + \dots))))$, les a et b étant deux entiers différents disposés comme les 0 et les 1 de (p_n) (voir l'article de B. Adamczewski et d'Y. Bugeaud).

Une multitude de suites fractales par extraction sont définies en utilisant des morphismes analogues à celui lié à (p_n) . Le morphisme $0 \rightarrow 01, 1 \rightarrow 0$ engendre progressivement la suite dont les premiers termes sont : $M_0 = 0 \rightarrow M_1 = 01 \rightarrow M_2 = 010 \rightarrow M_3 = 01001 \rightarrow M_4 = 01001010 \rightarrow M_5 = 0100101001001 \rightarrow \dots$, qui définit le « mot infini de Fibonacci » (suite A003849 de l'encyclopédie de Neil Sloane). La suite est fractale car, si l'on parcourt la suite en remplaçant chaque 01 par 0 et chaque 0 non suivi d'un 1 par 1, on obtient la suite elle-même. La suite se nomme ainsi car on a $M_n = M_{n-1} * M_{n-2}$ où $*$ désigne l'opération de concaténation ($01 * 0 \rightarrow 010$), ce qui évoque la formule définissant la suite numérique de Fibonacci.

Michael Drmota, Christian Mauduit et Jöel Rivat ont démontré en 2013 l'étrange propriété suivante : en ne retenant que les termes dont les rangs sont des carrés, la sous-suite obtenue est « normale », c'est-à-dire que la fréquence de 1 est $1/2$, la fréquence de 0 est $1/2$, la fréquence de 00 est $1/4$, ..., la fréquence d'une suite de 0 et de 1 de longueur k est $1/2^k$.

LES SUITES HÉSITANTES

Particulièrement intéressantes parmi les suites fractales par extraction sont les suites « hésitantes » (*reluctant* en anglais). La plus simple est $(H_n) = (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots)$, obtenue en comptant jusqu'à 1, puis en comptant de 1 jusqu'à 2, puis en comptant de 1 jusqu'à 3, etc. (suite A002260 dans l'encyclopédie). L'opérateur d'extraction T_a qui transforme une suite numérique en retirant la première occurrence de chaque entier admet (H_n) pour

point fixe : $T_a(H_n) = (H_n)$. Bien sûr, pour tout entier positif fixé k , on peut enlever de la suite les k premières occurrences de chaque entier et ce qui reste est la suite de départ, comme le phénix qui renaît de ses cendres.

Mais la suite (H_n) est fractale dans un autre sens. L'opérateur T_b qui soustrait une unité à chaque terme et ensuite retire tous les 0 a aussi (H_n) comme point fixe : $T_b(H_n) = (H_n)$.

La suite $(2, 2, 3, 2, 3, 5, 2, 3, 5, 7, 2, 3, 5, 7, 11, \dots)$ obtenue comme (H_n) , mais en énumérant les nombres premiers de plus en plus longuement, est aussi fractale au sens de l'extraction, car elle est un point fixe de T_a (c'est la suite A037126). Bien évidemment, en partant de n'importe quelle suite croissante, la même idée donnera une nouvelle suite fractale au sens de l'extraction. La suite $(1, 1, 4, 1, 4, 9, 1, 4, 9, 16, 1, 4, 9, 16, 25, \dots)$ tirée de la suite des carrés est encore l'une d'elles (A133819).

Remarquons que ni la suite hésitante tirée des nombres premiers ni celle tirée des carrés ne sont des points fixes pour T_b . Il y a pourtant une infinité de suites numériques qui sont un point fixe à la fois de T_a et de T_b , et elles sont particulièrement remarquables.

LA SIGNATURE DES NOMBRES RÉELS

Franklin Adams-Watters a proposé de nommer « suites doublement fractales » les suites qui sont un point fixe à la fois de T_a et de T_b . Une caractérisation étonnante et totalement inattendue de ces suites doublement fractales a été démontrée, et cela permet d'en construire une infinité.

Pour tout nombre réel positif r , on considère tous les nombres de la forme $i + (j \times r)$ où i et j sont des entiers positifs ; on classe par ordre croissant ces nombres, ce qui donne $i_0 + (j_0 \times r) < i_1 + (j_1 \times r) < i_2 + (j_2 \times r) < \dots$; la suite numérique $(i_0, i_1, i_2, \dots)$ est la « signature » du nombre r (voir un exemple détaillé de cette construction dans l'encadré 3 ci-dessous).

En 2004, Clark Kimberling et John Brown, de l'université d'Evansville, aux États-Unis, ont démontré que toute suite numérique signature

L'ÉTONNANTE SUITE FRACTALE DE KOLAKOSKI

Définition

On cherche à obtenir une suite composée alternativement de séries de « 1 » consécutifs et de « 2 » consécutifs, et qui démarre par (1, 2). On souhaite de plus que la suite se décrive elle-même selon l'idée que (1, 2) signifie que le début de la suite est composé de 1 fois le 1, 2 fois le 2.

Le 2 de (1, 2) implique ainsi que le troisième terme de la suite doit être un 2, il faut donc que la suite commence par (1, 2, 2), ce qui implique (à cause du deuxième 2, qui indique le nombre d'éléments de la série suivante de 1) qu'elle commence par (1, 2, 2, 1, 1), ce qui implique maintenant que le début de la suite est (1, 2, 2, 1, 1, 2, 1), etc. Le résultat est la suite de Kolakoski :

**1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1,
2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2,
1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2,
1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2,
... (suite A000002 de l'encyclopédie de Neil Sloane).**

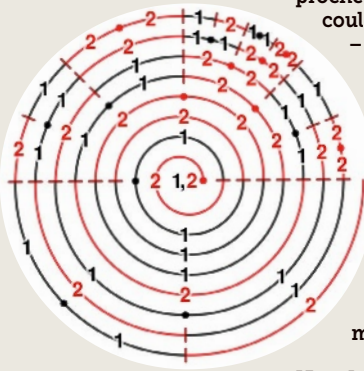
Spirale associée

Le dessin ci-dessous est dû à « Cmglee », un illustrateur anonyme de Wikipedia (https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Kolakoski). Il illustre comment la suite s'engendre à partir d'elle-même. Attention, c'est un peu casse-tête !

– On part du centre en supposant donnés 1, 2 et on initialise avec un tour complet pour le premier 2 en rouge. On construit ensuite la spirale de proche en proche en utilisant la couleur noire pour les 1, et la couleur rouge pour les 2.

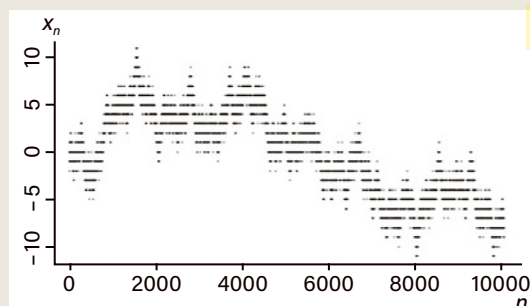
- Quand la partie de la spirale en dessous de celle qu'on construit porte un 1, on tourne pour la nouvelle partie de spirale aussi longtemps que la partie en dessous (par exemple de 360° , de 180° , etc.) en utilisant la couleur qui alterne avec la précédente.

– Quand la partie de la spirale en dessous de celle qu'on construit porte un 2, on construit deux nouveaux morceaux de la spirale, chacun tournant deux fois moins que celle en dessous, et chaque nouveau morceau utilisant la couleur qui alterne avec celle utilisée pour le morceau construit juste avant.



Nombres de 1 et de 2

On ignore si, à l'infini, les fréquences des 1 et des 2 tendent vers 1/2 dans la suite de Kolakoski. Certains calculs le suggèrent. Si, dans la suite de Kolakoski, on remplace les 2 par des -1, et que l'on définit x_n comme la somme de ces nombres jusqu'au n -ième, les valeurs positives de x_n signifient qu'il y a plus de 1 que de 2 jusqu'à n , et les valeurs négatives qu'il y en a moins. Voici une représentation des valeurs de x_n , jusqu'à $n = 10\,000$. Quand x_n repasse par 0, c'est que le nombre de 1 s'équilibre exactement avec le nombre de 2 dans la suite de Kolakoski. Cela se produit régulièrement.



Généralisations

La même idée, mais avec une suite ne comportant que des 1 et des 3 et commençant par (1, 3), conduit à la suite :
 1, 3, 3, 3, 1, 1, 3, 3, 3, 1, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 1, 3, 3,
 3, 1, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 1, 3, 1, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 1, 3,
 3, 3, 1, 1, ... (suite A064353).

Avec des 2 et des 3 et commençant par (2, 3) :

2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 3,
2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3,
2, 2, 3, 3, ... (suite A071820).

Dessin fractal

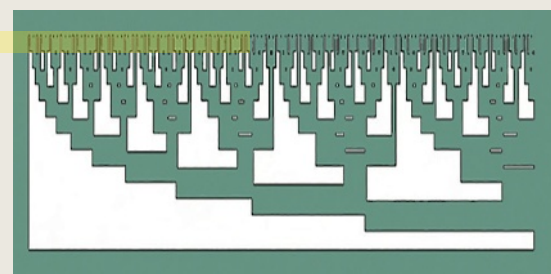
Le site Observable (<https://observablehq.com/@kelleyvanevert/the-kolakoski-sequence>) propose une amusante construction géométrique fractale en exploitant la suite de Kolakoski débutant par (1, 2). On part de la suite ; on la décrit sur la deuxième ligne, ce qui redonne la première ligne en plus espacée ; puis on décrit la deuxième ligne sur la troisième, etc.

[illegible]

On conserve les 2 en les répétant pour qu'ils occupent l'espace nécessaire :

[illegible]

On délimite les formes créées :



On dispose la figure sur un disque en la déformant continûment :

