

L'ÉTONNANTE SUITE FRACTALE DE KOLAKOSKI

Définition

On cherche à obtenir une suite composée alternativement de séries de « 1 » consécutifs et de « 2 » consécutifs, et qui démarre par (1, 2). On souhaite de plus que la suite se décrive elle-même selon l'idée que (1, 2) signifie que le début de la suite est composé de 1 fois le 1, 2 fois le 2.

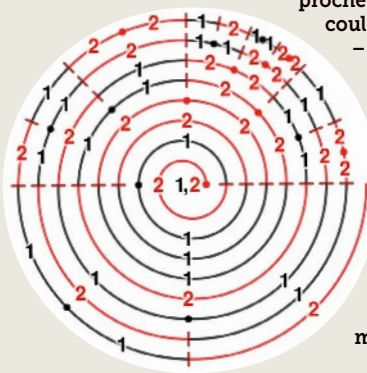
Le 2 de (1, 2) implique ainsi que le troisième terme de la suite doit être un 2, il faut donc que la suite commence par (1, 2, 2), ce qui implique (à cause du deuxième 2, qui indique le nombre d'éléments de la série suivante de 1) qu'elle commence par (1, 2, 2, 1, 1), ce qui implique maintenant que le début de la suite est (1, 2, 2, 1, 1, 2, 1), etc. Le résultat est la suite de Kolakoski :

1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1,
2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2,
1, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2,
1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2,
... (suite A000002 de l'encyclopédie de Neil Sloane).

Spirale associée

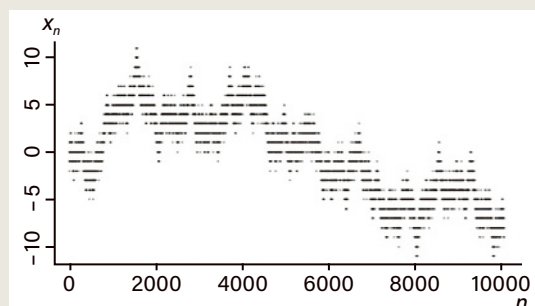
Le dessin ci-dessous est dû à « Cmglee », un illustrateur anonyme de Wikipedia (https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Kolakoski). Il illustre comment la suite s'engendre à partir d'elle-même. Attention, c'est un peu casse-tête !

- On part du centre en supposant donnés 1, 2 et on initialise avec un tour complet pour le premier 2 en rouge. On construit ensuite la spirale de proche en proche en utilisant la couleur noire pour les 1, et la couleur rouge pour les 2.
- Quand la partie de la spirale en dessous de celle qu'on construit porte un 1, on tourne pour la nouvelle partie de spirale aussi longtemps que la partie en dessous (par exemple de 360° , de 180° , etc.) en utilisant la couleur qui alterne avec la précédente.
- Quand la partie de la spirale en dessous de celle qu'on construit porte un 2, on construit deux nouveaux morceaux de la spirale, chacun tournant deux fois moins que celle en dessous, et chaque nouveau morceau utilisant la couleur qui alterne avec celle utilisée pour le morceau construit juste avant.



Nombres de 1 et de 2

On ignore si, à l'infini, les fréquences des 1 et des 2 tendent vers $1/2$ dans la suite de Kolakoski. Certains calculs le suggèrent. Si, dans la suite de Kolakoski, on remplace les 2 par des -1 , et que l'on définit x_n comme la somme de ces nombres jusqu'au n -ième, les valeurs positives de x_n signifient qu'il y a plus de 1 que de 2 jusqu'à n , et les valeurs négatives qu'il y en a moins. Voici une représentation des valeurs de x_n , jusqu'à $n = 10\,000$. Quand x_n repasse par 0, c'est que le nombre de 1 s'équilibre exactement avec le nombre de 2 dans la suite de Kolakoski. Cela se produit régulièrement.



Généralisations

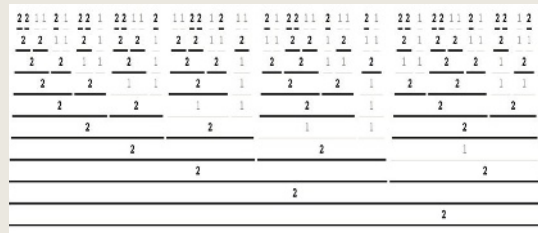
La même idée, mais avec une suite ne comportant que des 1 et des 3 et commençant par (1, 3), conduit à la suite :
 1, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 1, 3, 1, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 1, 3, 3,
 3, 1, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 1, 3, 1, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 1, 3,
 3, 3, 1, 1, ... (suite A064353).

Avec des 2 et des 3 et commençant par (2, 3) :

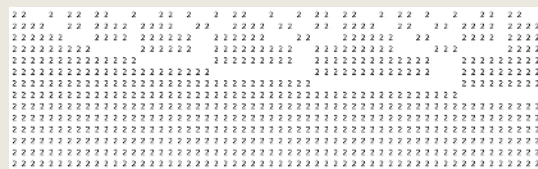
2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 3,
2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3,
2, 2, 3, 3. ... (suite A071820).

Dessin fractal

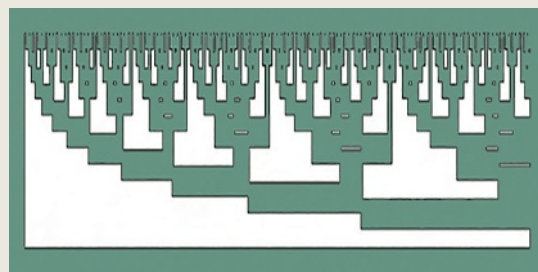
Le site Observable (<https://observablehq.com/@kelleyvanevert/the-kolakoski-sequence>) propose une amusante construction géométrique fractale en exploitant la suite de Kolakoski débutant par (1, 2). On part de la suite ; on la décrit sur la deuxième ligne, ce qui redonne la première ligne en plus espacée ; puis on décrit la deuxième ligne sur la troisième, etc.



On conserve les 2 en les répétant pour qu'ils occupent l'espace nécessaire :



On délimite les formes créées :



On dispose la figure sur un disque en la déformant continûment :

