d'un nombre réel est doublement fractale. Ils ont conjecturé la réciproque: toute suite doublement fractale est la signature d'un nombre réel. Le résultat a été démontré en 2016 par Matin Amini et Majid Jahangiri, de Téhéran.

Voici des exemples de ces extraordinaires suites doublement fractales:

Partant du nombre d'or $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$, on obtient: (1, 2, 1, 3, 2, 4, 1, 3, 5, 2, 4, 1, 6, 3, 5, 2, 7, 4, 1, 6, 3, 8, 5, 2, 7, 4, 9, 1, 6, 3, 8, 5, 10, 2, 7, 4, 9, 1, 6, 11, 3, 8, 5, 10, 2, 7, 12, 4, 9, 1, ...) (suite A084531).

Partant du nombre π, on tombe sur: (1, 2, 3, 4, 1, 5, 2, 6, 3, 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, 10, 7, 4, 1, 11, 8, 5, 2, 12, 9, 6, 3, 13, 10, 7, 4, 1, 14, 11, 8, 5, 2, 15, 12, 9, 6, 3, 16, 13, ...) (suite A023133).

Pour le nombre e des logarithmes: (1, 2, 3, 1, 4, 2, 5, 3, 6, 1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6, 9, 1, 4, 7, 10, 2, 5, 8, 11, 3, 6, 9, 1, 12, 4, 7, 10, 2, 13, 5, 8, 11, 3, 14, 6, 9, 1, 12, 4, 15, 7, ...) (suite A023123).

Ces suites vérifient bien que:

(1) Enlever la première occurrence de chaque entier redonne la suite elle-même.

(2) Soustraire 1 à chaque terme puis retirer les 0 redonne aussi la suite elle-même.

On démontre que toutes ces suites ont en plus les propriétés suivantes, qui, d'ailleurs, les caractérisent:

– tout entier positif y figure au moins une fois;

– quand l'entier n apparaît, chacun des entiers positifs inférieurs à n est déjà apparu;

- entre deux occurrences successives de l'entier n, chaque entier compris entre 1 et n apparaît exactement une fois.

Puisqu'il y a une suite doublement fractale associée à chaque nombre réel, et que si les réels sont différents les signatures le sont aussi, la famille de suites doublement fractales est un ensemble infini non dénombrable, c'est-à-dire d'un infini «plus grand» que celui des nombres entiers. Bien évidemment, l'encyclopédie de Neil Sloane n'en a sélectionné que quelques-unes!

UNE SUITE QUI S'AUTODÉCRIT

Terminons par une suite fractale bien différente de celles envisagées jusqu'à présent. Découverte en 1939 par l'Américain Rufus Oldenburger, elle porte cependant le nom de suite de Kolakoski, car ce sont William Kolakoski et Necdet Üçoluk, aux États-Unis, qui ont attiré l'attention sur elle en 1966.

Cette suite est étrangement délicate et des dizaines d'articles mathématiques lui ont été consacrés, sans réussir à en livrer tous les mystères. En voici les 100 premiers termes: 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2.

Cette suite est fractale, car si vous la décrivez soigneusement en la lisant – « il y a 1 fois le 1, 2 fois le 2, 2 fois le 1, 1 fois le 2, etc. »–, ce que vous obtenez en rouge est la suite elle-même: la suite s'autodécrit. En termes d'opérateur, elle est un point fixe de l'opérateur qui compte les répétitions de termes consécutifs dans une suite. Son numéro est A000002.

Comme la suite de Prouhet, elle ne contient jamais trois fois de suite la même séquence. Mais alors que pour la suite de Prouhet il est évident que la fréquence des 1 (ou des 0) est 1/2, on ignore s'il y a autant de 1 que de 2 dans la suite de Kolakoski.

Le mathématicien tchèque Václav Chvátal a prouvé en 1993 que la densité des 1 est inférieure à 0,50084. Le résultat a été amélioré en 2014 par le mathématicien allemand Johan Nilsson avec 0,500080. Des calculs menés jusqu'au terme 10^{13} montrent que l'écart à 1/2 diminue, comme cela se produirait pour une suite uniformément tirée au hasard de 1 et de 2, ce qui suggère fortement que les densités limites des 1 et des 2 sont réellement 1/2. L'affirmation reste cependant une conjecture non démontrée.

Jon Perry a remarqué que si l'on prend des sous-suites de dix termes consécutifs dans la suite, alors les seules valeurs possibles pour le nombre de 1 sont 4, 5 et 6, mais cette affirmation reste aussi une conjecture. Michel Dekking indique que la suite est fractale dans un second sens, car elle est un point fixe de l'opérateur qui opère les substitutions suivantes sur les paquets de deux termes consécutifs: $11 \to 12$, $12 \to 122$, $21 \to 112$, $22 \to 1122$.

Le mathématicien amateur français Benoît Cloitre, mentionné à plusieurs reprises dans cette rubrique, a démontré d'intéressants résultats sur cette suite; ils permettent d'écrire des programmes simples pour la calculer. Il a proposé en particulier les formules suivantes qui définissent complètement la suite de Kolakoski, ici notée $k(n)$:

$k(1)=1$; $k(2)=2$;

$k(k(1)+k(2)+\ldots+k(m))=(3+(-1)^m)/2$;

$k(k(1)+k(2)+\ldots+k(m)+1)=(3-(-1)^m)/2$.

De nombreux auteurs se sont intéressés au calcul rapide de cette suite permettant de la connaître très loin. Reste qu'elle est sans doute la plus délicate et difficile suite fractale connue: elle a suscité une longue série de conjectures encore non résolues.

Prouhet ne se doutait pas que la création de sa suite aurait de tels prolongements. Comme dans la tragédie de Sophocle où le geste d'Antigone de jeter une poignée de terre sur la tombe de son frère entraîne toute une série d'événements imprévus, nos actions se détachent de nous pour mener une existence propre.

Si ces suites et ce type de mathématiques vous amusent, avec l'encyclopédie de Neil Sloane, vous avez de quoi vous occuper! Si vous voulez suivre et participer aux progrès du domaine, rejoignez la liste *Seqfan*. ■

BIBLIOGRAPHIE

A. Della Corte, **Kolakoski sequence : Links between recurrence, symmetry and limit density**, prépublication, 22 septembre 2020 (https://arxiv.org/abs/2002.08306).

M. Amini et M. Jahangiri, **A novel proof for Kimberling's conjecture on doubly fractal sequences**, prépublication, 2016 (https://arxiv.org/pdf/1612.09481.pdf).

J. Nilsson, **Letter frequencies in the Kolakoski sequence**, *Acta Physica Polonica A*, 2014 (http://przyrbwn.icm.edu.pl/APP/PDF/126/a126z2p31.pdf).

M. Drmota *et al.*, **The Thue-Morse sequence along squares is normal**, 2013 (https://www.dmg.tuwien.ac.at/drmota/alongsquares.pdf).

B. Adamczewski et Y. Bugeaud, **A short proof of the transcendence of Thue-Morse continued fractions**, *The Amer. Math. Monthly*, vol. 114(6), pp. 536-540, 2007.

C. Kimberling et J. E. Brown, **Partial complements and transposable dispersions**, *Journal of Integer Sequences*, vol. 7, article 04.1.6, 2004.

J.-P. Allouche et J. Shallit, **The ubiquitous Prouhet-Thue-Morse sequence**, dans C. Ding *et al.* (éd.), *Sequences and their Applications*, Springer, pp. 1-16 1999.

M. Dekking, **Transcendance du nombre de Thue-Morse**, *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, vol. 285, pp. 157-160, 1977.