



Grâce à deux techniques distinctes (coloration au fer, à gauche, à l'argent, à droite), Édouard Chatton a mis en évidence deux structures bien distinctes dans le protiste cilié *Glaucoma piriformis* : des stries rectilignes munies de granules, ou cinétosomes (à gauche), et des cordons sinueux (à droite). Il a ainsi montré que les stries et les granules persistaient au fil des divisions cellulaires et produisaient les cils du protiste.

dans l'arbre phylogénétique des organismes unicellulaires, il la nomma *Pansporella perplexa*. C'est pourtant à partir de ses réflexions sur cette petite amibe qu'il édifie un arbre phylogénétique du vivant. Pour cela, il ne se contenta pas de comparer la morphologie des organismes unicellulaires, mais il prit en compte l'ensemble du cycle de vie de ces organismes et révéla ainsi des filiations qui auraient été invisibles sans la connaissance des différentes formes successives adoptées par la cellule au cours de sa vie. C'est grâce à cette méthode et aux réflexions que lui inspirait *Pansporella* qu'il proposa de séparer le vivant en deux catégories, qu'il nomma les cellules « procaryotes », dépourvues de noyau, et les cellules « eucaryotes » qui en ont un (voir l'encadré page 78). Cette paternité est tombée dans l'oubli alors même qu'il s'agit d'un concept qui sert de cadre à toute la biologie !

Chatton est également l'un des pionniers de la biologie cellulaire, notamment sur deux aspects qu'il a abordés en profondeur à travers l'étude de divers protistes, depuis son arrivée à Strasbourg en 1919 jusqu'à sa mort : les mécanismes de la division de la cellule d'une part et, d'autre part, l'organisation et le fonctionnement des cils et des flagelles, de petites expansions qui permettent aux protistes qui en sont pourvus de se déplacer, mais aussi de se fixer sur des supports, de guider la nourriture vers de petits entonnoirs leur servant de bouches, ou encore de former des microharpons à usage défensif ou agressif. Avant l'arrivée de la microscopie électronique, il décrit ces microarchitectures dans leurs moindres détails, perçant leur fonctionnement et les secrets de leur origine.

La question était complexe : comment ces structures si élaborées et stéréotypées s'organisaient-elles dans des cellules issues de la division d'une cellule mère qui en était dépourvue ? Il renversa le dogme de l'autoorganisation, en vigueur à l'époque, pour démontrer qu'il existait une continuité lors de la division, et que, même dépourvue de cils, la cellule mère léguait à ses filles un réseau de petits granules, les cinétosomes (aujourd'hui appelés « centrosomes ») qui dictaient le plan de réorganisation de la ciliature (voir le dessin ci-contre).

Au début des années 1920, le biologiste décrypta aussi le déterminisme de la sexualité des protistes ciliés dans des travaux très modernes menés avec Marie Chatton, son épouse, et montra comment la présence de certaines bactéries spécifiques guide le choix entre sexualité et simple division clonale. Il découvrit nombre de cycles de vie de nouveaux protistes parasites ou symbiotes, ce qui l'entraîna à discuter du poids respectif de l'hérédité des caractères acquis et des caractères innés. Avec un demi-siècle d'avance, il jeta ainsi les bases de l'épigénétique, l'étude des mécanismes qui modifient les caractères d'un organisme sans modifier les gènes eux-mêmes, mais en jouant sur leur activité, et qui peuvent être hérités chez les organismes unicellulaires d'une génération à une autre par la division cellulaire – aujourd'hui un domaine passionnant de recherche.

INVENTEUR À SES HEURES

Ces découvertes ne découlaient pas que de la curiosité clairvoyante de Chatton. Elles ont requis l'invention de techniques longues et délicates. Ainsi, en 1930, le biologiste mit au point une technique d'imprégnation argentique permettant des observations de haute résolution d'organismes unicellulaires marins, encore utilisée de nos jours. En 1921, grâce à ses talents de bricoleur, il inventa aussi un régulateur à fléau bimétallique pour thermostats à chauffage électrique pour équiper les étuves de laboratoire, ce qui permit d'éliminer les feux permanents des étuves à gaz et de mieux stabiliser les températures requises.

Édouard Chatton est une belle figure qui devrait inspirer les biologistes du XXI^e siècle. Il récapitule en effet les qualités attendues des chercheurs, qu'ils soient d'hier ou d'aujourd'hui : la capacité à mettre les observations les plus pointues au service d'une vision d'ensemble cohérente ; la curiosité, la soif d'explorer l'inconnu, le goût du risque ; la liberté d'esprit, la force de s'affranchir des dogmes et de pouvoir en renverser. Sa passion et son émerveillement devant les êtres minuscules qui peuplent les eaux ont pavé la voie de la protistologie (voir l'encadré page ci-contre) et nous ont légué de fabuleux dessins de ces mondes infinitésimaux. ■

BIBLIOGRAPHIE

C. Jessus et V. Laudet, **Les Vies minuscules d'Édouard Chatton**, CNRS, 2020.

M. O. Soyer-Gobillard et J. Schrevel, **The discoveries and artistic talents of Édouard Chatton and André Lwoff, famous biologists**, Cambridge Scholars Publishing, 2020.

E. Karsenti, **Aux sources de la vie : de la cellule à l'être humain**, Flammarion, 2018.

L. Loison, **André Lwoff, une autobiographie. Itinéraire scientifique d'un Prix Nobel**, Hermann, 2017.

M. Morange, **Les Mousquetaires de la nouvelle biologie, Les Génies de la Science**, février 2002.

E. Chatton, **Titres et travaux scientifiques (1906-1937)**, Sottano, 1937.

R

ENDEZ-VOUS

P.82 Logique & calcul
 P.88 Idées de physique
 P.92 Chroniques de l'évolution
 P.96 Science & gastronomie
 P.98 À picorer

L'ÉTRANGE THÉORÈME DE PICK

Depuis plus d'un siècle, ce résultat élémentaire de géométrie du plan intrigue les mathématiciens, qui cherchent à le généraliser et à en simplifier la démonstration.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au
 laboratoire Cristal
 (Centre de recherche
 en informatique, signal
 et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

Certains résultats mathématiques semblent improbables, voire impossibles, avant qu'on les démontre, et ce n'est qu'en suivant pas à pas leur démonstration qu'on se convainc de leur validité. Parfois même, on n'est vraiment certain de la justesse d'un résultat qu'en le démontrant par plusieurs méthodes différentes, aussi variées que possible.

Le théorème de Pick appartient à cette catégorie. Il indique comment calculer la surface de certains polygones en se contentant de repérer l'emplacement des points d'un quadrillage, ce qui, *a priori*, semble insuffisant pour un résultat précis. Exceptionnellement, cette rubrique va explorer plusieurs démonstrations du résultat, car elles montrent comment des arguments indépendants aboutissent à une même conclusion, ce qui est une situation courante en mathématiques... et la meilleure façon d'être absolument certain qu'un résultat surprenant est correct !

L'aspect déconcertant du théorème de Pick a non seulement conduit à en chercher des preuves variées invoquant parfois des arguments de physique, mais aussi à en formuler des généralisations. En effet, c'est parfois la généralisation d'un résultat qui en fait saisir le sens profond. Le côté visuel et élémentaire de

l'énoncé a suscité un intérêt ininterrompu pour l'étrange découverte de Pick, dont on a proposé des démonstrations pour collégiens en même temps que des développements parfois très savants. Les travaux de recherche sur le thème sont devenus difficiles à collecter totalement et, bien que disposant de plus de 50 articles liés au théorème, il m'en manque encore certainement. On présentera aussi une nouvelle famille de généralisations du théorème de Pick, récentes et particulièrement élégantes.

DES SURFACES ET DES POINTS

Georg Pick (1859-1942) a joué un rôle discret mais important dans l'histoire des sciences du ^{xx}e siècle. Outre son théorème sur les polygones, publié en 1899 dans une revue de mathématiques à Prague et popularisé par le mathématicien polonais Hugo Steinhaus, qui le présenta dans son livre *Mathematical Snapshots* en 1969, il a côtoyé plusieurs grands chercheurs de son temps. Il a ainsi été l'élève d'Ernst Mach, le célèbre physicien dont le nom sert d'unité de mesure de la vitesse, en fonction de celle du son dans un milieu donné. Pick a aussi travaillé avec le mathématicien allemand Felix Klein, auquel on doit d'importants travaux en théorie des groupes. Surtout, à l'université de Prague, où Albert Einstein fut

recruté en 1910, Pick a initié ce dernier au calcul tensoriel, qui a ensuite joué un rôle important dans la formulation de la théorie de la relativité générale: sans lui, elle n'aurait donc peut-être pas été conçue. Le 13 juillet 1942, à cause de son origine juive, Pick fut arrêté par les nazis et déporté au camp de Theresienstadt, où il mourut treize jours plus tard, à l'âge de 82 ans.

En quoi consiste le célèbre théorème qu'il nous a légué? On considère le plan et tous ses points de coordonnées entières: (1,1), (51,12), (-3,7), etc., que l'on dénomme «points du réseau». On construit un polygone P dont les sommets sont des points du réseau. On suppose que le polygone est d'un seul tenant, sans trou, et que le bord du polygone ne se recoupe pas; autrement dit, on suppose qu'en suivant le bord de P, on en fait le tour sans passer deux fois par le même point, et qu'il n'y a pas d'autre point du bord que ceux rencontrés dans ce parcours.

Le théorème de Georg Pick affirme que la surface d'un tel polygone est donnée par la formule $S = I + B/2 - 1$, où I est le nombre de points du réseau situés à l'intérieur du polygone et B le nombre de points du réseau

appartenant au bord du polygone (voir des exemples dans l'encadré 1).

Une démonstration élémentaire du théorème est proposée dans l'encadré 2. Elle est assez longue, mais chacune de ses étapes peut être expliquée à un élève de collège. Une autre démonstration est proposée dans l'encadré 5. Plus rapide, elle demande peut-être un effort de concentration plus grand. Une troisième démonstration, fondée sur une idée physique de diffusion de la chaleur, est encore plus courte. Elle est expliquée dans l'encadré 4. Elle suggère une démonstration par dissection du polygone, purement visuelle, mais pas pour autant très facile à comprendre.

Amusez-vous à suivre ces démonstrations. Il n'y a pas de doute que vous vous convaincrez pleinement que ce théorème étrange, et même douteux au premier regard, est parfaitement exact.

UN THÉORÈME AUX MULTIPLES APPLICATIONS

On pourrait reprocher au théorème de Pick de ne permettre le calcul d'une surface que dans des cas très particuliers. Ce n'est pas exact pour plusieurs raisons.

LE THÉORÈME DE PICK : QUELQUES EXEMPLES

1

Le théorème de Pick donne une méthode pour calculer la surface S d'un polygone ayant ses sommets sur le réseau des points à coordonnées entières. Selon ce résultat, il suffit de compter le nombre de points du réseau à l'intérieur du polygone (en bleu), noté I , le nombre de points du réseau sur le bord du polygone (en rouge), B , et d'utiliser la formule :

$$S = I + B/2 - 1.$$

Pour le dessin 1, on a $I = 9$ et $B = 4$, ce qui donne $S = 10$.

Pour le dessin 2, $I = 0$ et $B = 16$, donc $S = 7$.

Pour le dessin 3, $I = 0$ et $B = 26$, donc $S = 12$.

Pour le dessin 4, $I = 8$ et $B = 6$, donc $S = 10$.

Le théorème de Pick n'est valable que si le polygone est d'un seul tenant, ne possède pas de trou et que si son bord ne se recoupe pas. Quand un polygone dont les sommets sont sur le réseau ne vérifie pas ces conditions, il est facile de le décomposer en plusieurs morceaux que le théorème permet de traiter.

Ainsi, sur le dessin 5, on utilise le théorème de Pick pour les trois polygones A, B et C, ce qui donne $S(A) = 2$, $S(B) = 10$, $S(C) = 2$, donc $S(P) = 2 + 10 - 2 = 10$.

