

recruté en 1910, Pick a initié ce dernier au calcul tensoriel, qui a ensuite joué un rôle important dans la formulation de la théorie de la relativité générale: sans lui, elle n'aurait donc peut-être pas été conçue. Le 13 juillet 1942, à cause de son origine juive, Pick fut arrêté par les nazis et déporté au camp de Theresienstadt, où il mourut treize jours plus tard, à l'âge de 82 ans.

En quoi consiste le célèbre théorème qu'il nous a légué? On considère le plan et tous ses points de coordonnées entières: (1,1), (51,12), (-3,7), etc., que l'on dénomme «points du réseau». On construit un polygone P dont les sommets sont des points du réseau. On suppose que le polygone est d'un seul tenant, sans trou, et que le bord du polygone ne se recoupe pas; autrement dit, on suppose qu'en suivant le bord de P, on en fait le tour sans passer deux fois par le même point, et qu'il n'y a pas d'autre point du bord que ceux rencontrés dans ce parcours.

Le théorème de Georg Pick affirme que la surface d'un tel polygone est donnée par la formule $S = I + B/2 - 1$, où I est le nombre de points du réseau situés à l'intérieur du polygone et B le nombre de points du réseau

appartenant au bord du polygone (voir des exemples dans l'encadré 1).

Une démonstration élémentaire du théorème est proposée dans l'encadré 2. Elle est assez longue, mais chacune de ses étapes peut être expliquée à un élève de collège. Une autre démonstration est proposée dans l'encadré 5. Plus rapide, elle demande peut-être un effort de concentration plus grand. Une troisième démonstration, fondée sur une idée physique de diffusion de la chaleur, est encore plus courte. Elle est expliquée dans l'encadré 4. Elle suggère une démonstration par dissection du polygone, purement visuelle, mais pas pour autant très facile à comprendre.

Amusez-vous à suivre ces démonstrations. Il n'y a pas de doute que vous vous convaincrez pleinement que ce théorème étrange, et même douteux au premier regard, est parfaitement exact.

UN THÉORÈME AUX MULTIPLES APPLICATIONS

On pourrait reprocher au théorème de Pick de ne permettre le calcul d'une surface que dans des cas très particuliers. Ce n'est pas exact pour plusieurs raisons.

LE THÉORÈME DE PICK : QUELQUES EXEMPLES

1

Le théorème de Pick donne une méthode pour calculer la surface S d'un polygone ayant ses sommets sur le réseau des points à coordonnées entières. Selon ce résultat, il suffit de compter le nombre de points du réseau à l'intérieur du polygone (en bleu), noté I , le nombre de points du réseau sur le bord du polygone (en rouge), B , et d'utiliser la formule :

$$S = I + B/2 - 1.$$

Pour le dessin 1, on a $I = 9$ et $B = 4$, ce qui donne $S = 10$.

Pour le dessin 2, $I = 0$ et $B = 16$, donc $S = 7$.

Pour le dessin 3, $I = 0$ et $B = 26$, donc $S = 12$.

Pour le dessin 4, $I = 8$ et $B = 6$, donc $S = 10$.

Le théorème de Pick n'est valable que si le polygone est d'un seul tenant, ne possède pas de trou et que si son bord ne se recoupe pas. Quand un polygone dont les sommets sont sur le réseau ne vérifie pas ces conditions, il est facile de le décomposer en plusieurs morceaux que le théorème permet de traiter.

Ainsi, sur le dessin 5, on utilise le théorème de Pick pour les trois polygones A, B et C, ce qui donne $S(A) = 2$, $S(B) = 10$, $S(C) = 2$, donc $S(P) = 2 + 10 - 2 = 10$.

