

recruté en 1910, Pick a initié ce dernier au calcul tensoriel, qui a ensuite joué un rôle important dans la formulation de la théorie de la relativité générale: sans lui, elle n'aurait donc peut-être pas été conçue. Le 13 juillet 1942, à cause de son origine juive, Pick fut arrêté par les nazis et déporté au camp de Theresienstadt, où il mourut treize jours plus tard, à l'âge de 82 ans.

En quoi consiste le célèbre théorème qu'il nous a légué? On considère le plan et tous ses points de coordonnées entières: $(1,1)$, $(51,12)$, $(-3,7)$, etc., que l'on dénomme «points du réseau». On construit un polygone P dont les sommets sont des points du réseau. On suppose que le polygone est d'un seul tenant, sans trou, et que le bord du polygone ne se recoupe pas; autrement dit, on suppose qu'en suivant le bord de P , on en fait le tour sans passer deux fois par le même point, et qu'il n'y a pas d'autre point du bord que ceux rencontrés dans ce parcours.

Le théorème de Georg Pick affirme que la surface d'un tel polygone est donnée par la formule $S = I + B/2 - 1$, où I est le nombre de points du réseau situés à l'intérieur du polygone et B le nombre de points du réseau

appartenant au bord du polygone (voir des exemples dans l'encadré 1).

Une démonstration élémentaire du théorème est proposée dans l'encadré 2. Elle est assez longue, mais chacune de ses étapes peut être expliquée à un élève de collège. Une autre démonstration est proposée dans l'encadré 5. Plus rapide, elle demande peut-être un effort de concentration plus grand. Une troisième démonstration, fondée sur une idée physique de diffusion de la chaleur, est encore plus courte. Elle est expliquée dans l'encadré 4. Elle suggère une démonstration par dissection du polygone, purement visuelle, mais pas pour autant très facile à comprendre.

Amusez-vous à suivre ces démonstrations. Il n'y a pas de doute que vous vous convaincrez pleinement que ce théorème étrange, et même douteux au premier regard, est parfaitement exact.

UN THÉORÈME AUX MULTIPLES APPLICATIONS

On pourrait reprocher au théorème de Pick de ne permettre le calcul d'une surface que dans des cas très particuliers. Ce n'est pas exact pour plusieurs raisons.

LE THÉORÈME DE PICK : QUELQUES EXEMPLES

1

Le théorème de Pick donne une méthode pour calculer la surface S d'un polygone ayant ses sommets sur le réseau des points à coordonnées entières. Selon ce résultat, il suffit de compter le nombre de points du réseau à l'intérieur du polygone (en bleu), noté I , le nombre de points du réseau sur le bord du polygone (en rouge), B , et d'utiliser la formule :

$$S = I + B/2 - 1.$$

Pour le dessin 1, on a $I = 9$ et $B = 4$, ce qui donne $S = 10$.

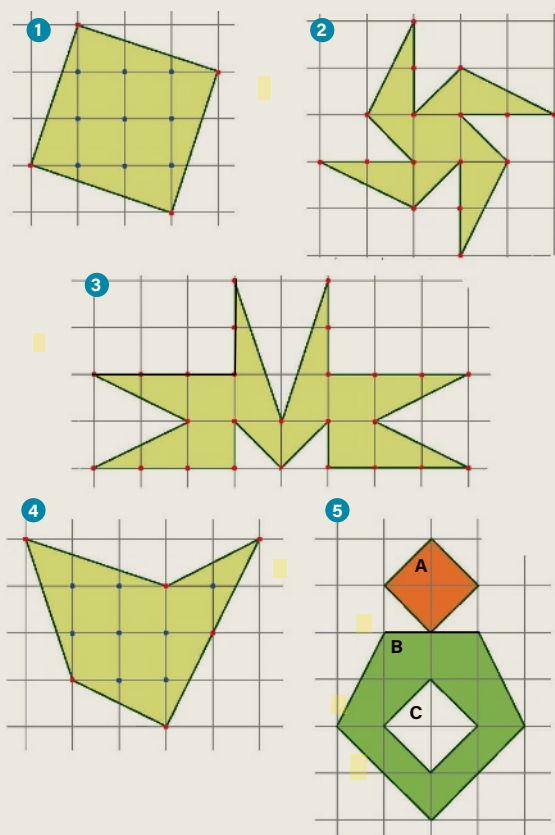
Pour le dessin 2, $I = 0$ et $B = 16$, donc $S = 7$.

Pour le dessin 3, $I = 0$ et $B = 26$, donc $S = 12$.

Pour le dessin 4, $I = 8$ et $B = 6$, donc $S = 10$.

Le théorème de Pick n'est valable que si le polygone est d'un seul tenant, ne possède pas de trou et que si son bord ne se recoupe pas. Quand un polygone dont les sommets sont sur le réseau ne vérifie pas ces conditions, il est facile de le décomposer en plusieurs morceaux que le théorème permet de traiter.

Ainsi, sur le dessin 5, on utilise le théorème de Pick pour les trois polygones A, B et C, ce qui donne $S(A) = 2$, $S(B) = 10$, $S(C) = 2$, donc $S(P) = 2 + 10 - 2 = 10$.



2

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE PICK

La démonstration se fait en plusieurs étapes, qui sont toutes élémentaires. Pour simplifier le langage, tous les rectangles, triangles et polygones mentionnés sont supposés d'un seul tenant et sans trou, ont un bord qui ne se recoupe pas, et les sommets sont sur des points à coordonnées entières. Le but est de démontrer que la surface d'un polygone P est $S = I + B/2 - 1$, où I est le nombre des points du réseau à l'intérieur de P et B est le nombre de points du réseau sur le bord de P .

A/ Soient deux polygones P_1 et P_2 qui ne se chevauchent pas et qui vérifient le théorème de Pick. Le polygone P obtenu en les réunissant par la partie commune de leurs bords vérifie aussi le théorème de Pick.
Soient P_1 et P_2 deux polygones qu'on assemble par la partie commune de leurs bords, ce qui donne P (voir la figure 1). Notons I_1, B_1, I_2, B_2, I, B les paramètres de P_1, P_2, P , et J le nombre de points du réseau qui sont sur la partie des bords collés, à l'exception des extrémités ($J = 3$ sur le dessin). On a les égalités suivantes, toutes évidentes par construction ou opérations :
 $(I_1 + B_1/2 - 1) + (I_2 + B_2/2 - 1) =$
 $(I_1 + I_2) + (B_1 + B_2)/2 - 2 =$
 $I - J + (B_1 + B_2)/2 - 2 =$
 $I + (B_1 + B_2 - 2J - 2)/2 - 1 =$
 $I + B/2 - 1$

En notant S_1 et S_2 les surfaces des polygones P_1 et P_2 , dont on suppose qu'ils vérifient le théorème de Pick, et S celle de leur assemblage, on a donc :
 $S = S_1 + S_2 =$
 $(I_1 + B_1/2 - 1) + (I_2 + B_2/2 - 1) =$
 $I + B/2 - 1$
Ce qui signifie que le nouveau polygone vérifie aussi le théorème de Pick.

B/ Si un polygone P est obtenu en collant deux polygones P_1 et P_2 , et si P_1 et P_2 vérifient le théorème de Pick, alors P le vérifie aussi.
Au paragraphe A, on a obtenu :
 $(I_1 + B_1/2 - 1) + (I_2 + B_2/2 - 1) =$
 $I + B/2 - 1$
On en tire que $S_2 = S - S_1 =$
 $(I + B/2 - 1) - (I_1 + B_1/2 - 1) =$
 $I_2 + B_2/2 - 1$
 P_2 vérifie donc le théorème de Pick.

C/ Le théorème de Pick est vrai pour un rectangle.
Soit a sa hauteur et b sa largeur.
 $I = (a - 1) \times (b - 1), B = 2a + 2b$.
Donc $I + B/2 - 1 =$
 $ab - a - b + 1 + a + b - 1 = ab$,
ce qui est bien la surface attendue (voir la figure 2).

D/ Le théorème de Pick est vrai pour un triangle rectangle dont l'un des petits côtés est horizontal et l'autre vertical.
En accolant une copie de ce triangle contre son hypoténuse, on obtient

un rectangle, pour lequel on sait que le théorème est vrai. Si on note S, I, B les paramètres du rectangle et S', I', B' les paramètres du triangle rectangle, d'après la formule du paragraphe A, on a :
 $S = I + B/2 - 1 = 2(I' + B'/2 - 1) = 2S'$.
Donc $S' = (I' + B'/2 - 1)$. Le triangle vérifie le théorème de Pick.

E/ Le théorème de Pick est vrai pour tout triangle.

Deux cas se présentent (voir la figure 2), mais, à chaque fois, en partant du rectangle (qui vérifie le théorème de Pick, d'après le paragraphe C) le plus petit qui contient le triangle, et en enlevant des triangles rectangles (qui vérifient aussi le théorème) ou des rectangles (pour le deuxième cas), on passe progressivement à d'autres polygones qui vérifient le théorème de Pick (d'après le paragraphe B), jusqu'à arriver au triangle central qui le vérifie donc aussi.

F/ Le théorème est vrai pour tout polygone.

Il suffit de décomposer le polygone en triangles ayant pour sommets des points du réseau. D'après le paragraphe E, chacun vérifie le théorème de Pick. En les assemblant un par un, on arrive (grâce au résultat du paragraphe A) au polygone voulu qui vérifie donc le théorème de Pick (voir la figure 3).

