

2

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE PICK

La démonstration se fait en plusieurs étapes, qui sont toutes élémentaires. Pour simplifier le langage, tous les rectangles, triangles et polygones mentionnés sont supposés d'un seul tenant et sans trou, ont un bord qui ne se recoupe pas, et les sommets sont sur des points à coordonnées entières. Le but est de démontrer que la surface d'un polygone P est $S = I + B/2 - 1$, où I est le nombre des points du réseau à l'intérieur de P et B est le nombre de points du réseau sur le bord de P .

A/ Soient deux polygones P_1 et P_2 qui ne se chevauchent pas et qui vérifient le théorème de Pick. Le polygone P obtenu en les réunissant par la partie commune de leurs bords vérifie aussi le théorème de Pick.

Soient P_1 et P_2 deux polygones qu'on assemble par la partie commune de leurs bords, ce qui donne P (voir la figure 1). Notons I_1, B_1, I_2, B_2, I, B les paramètres de P_1, P_2, P , et J le nombre de points du réseau qui sont sur la partie des bords collés, à l'exception des extrémités ($J = 3$ sur le dessin). On a les égalités suivantes, toutes évidentes par construction ou opérations :

$$(I_1 + B_1/2 - 1) + (I_2 + B_2/2 - 1) = (I_1 + I_2) + (B_1 + B_2)/2 - 2 = I - J + (B_1 + B_2)/2 - 2 = I + (B_1 + B_2 - 2J - 2)/2 - 1 = I + B/2 - 1$$

En notant S_1 et S_2 les surfaces des polygones P_1 et P_2 , dont on suppose qu'ils vérifient le théorème de Pick, et S celle de leur assemblage, on a donc :

$$S = S_1 + S_2 = (I_1 + B_1/2 - 1) + (I_2 + B_2/2 - 1) = I + B/2 - 1$$

Ce qui signifie que le nouveau polygone vérifie aussi le théorème de Pick.

B/ Si un polygone P est obtenu en collant deux polygones P_1 et P_2 , et si P_1 et P_2 vérifient le théorème de Pick, alors P le vérifie aussi.

Au paragraphe A, on a obtenu :

$$(I_1 + B_1/2 - 1) + (I_2 + B_2/2 - 1) = I + B/2 - 1.$$

$$\text{On en tire que } S_2 = S - S_1 = (I + B/2 - 1) - (I_1 + B_1/2 - 1) = I_2 + B_2/2 - 1.$$

P_2 vérifie donc le théorème de Pick.

C/ Le théorème de Pick est vrai pour un rectangle.

Soit a sa hauteur et b sa largeur.

$$I = (a - 1) \times (b - 1), B = 2a + 2b.$$

$$\text{Donc } I + B/2 - 1 =$$

$$ab - a - b + 1 + a + b - 1 = ab,$$

ce qui est bien la surface attendue (voir la figure 2).

D/ Le théorème de Pick est vrai pour un triangle rectangle dont l'un des petits côtés est horizontal et l'autre vertical.

En accolant une copie de ce triangle contre son hypoténuse, on obtient

un rectangle, pour lequel on sait que le théorème est vrai. Si on note S, I, B les paramètres du rectangle et S', I', B' les paramètres du triangle rectangle, d'après la formule du paragraphe A, on a :

$$S = I + B/2 - 1 = 2(I' + B'/2 - 1) = 2S'.$$

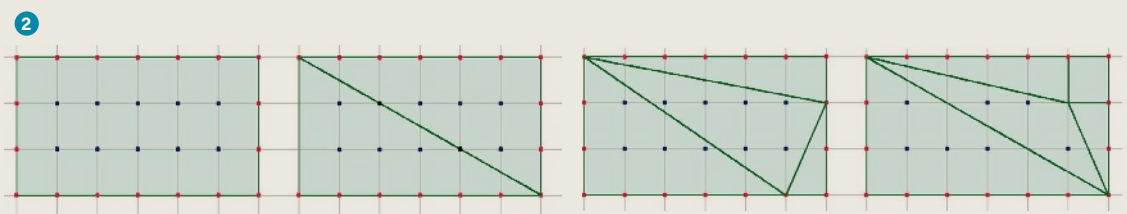
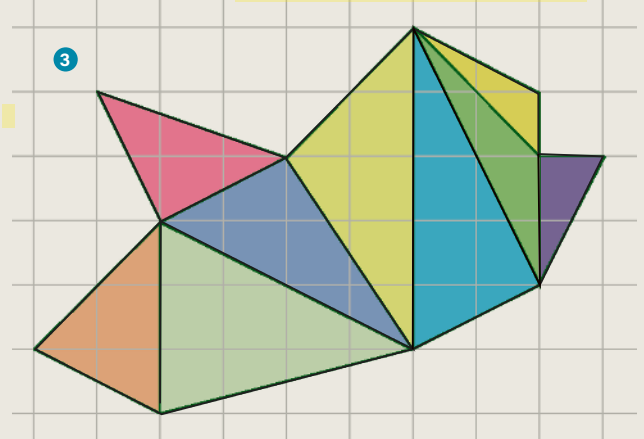
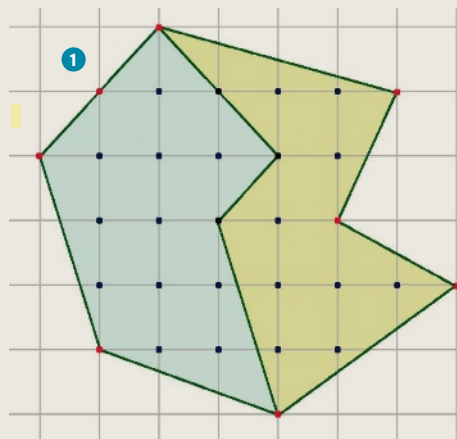
Donc $S' = (I' + B'/2 - 1)$. Le triangle vérifie le théorème de Pick.

E/ Le théorème de Pick est vrai pour tout triangle.

Deux cas se présentent (voir la figure 2), mais, à chaque fois, en partant du rectangle (qui vérifie le théorème de Pick, d'après le paragraphe C) le plus petit qui contient le triangle, et en enlevant des triangles rectangles (qui vérifient aussi le théorème) ou des rectangles (pour le deuxième cas), on passe progressivement à d'autres polygones qui vérifient le théorème de Pick (d'après le paragraphe B), jusqu'à arriver au triangle central qui le vérifie donc aussi.

F/ Le théorème est vrai pour tout polygone.

Il suffit de décomposer le polygone en triangles ayant pour sommets des points du réseau. D'après le paragraphe E, chacun vérifie le théorème de Pick. En les assemblant un par un, on arrive (grâce au résultat du paragraphe A) au polygone voulu qui vérifie donc le théorème de Pick (voir la figure 3).



(a) Si le polygone n'est pas d'un seul tenant, possède des trous ou que son bord se recoupe, il est facile de décomposer le calcul de son aire en utilisant plusieurs fois le théorème de Pick: on l'applique une fois pour chaque trou (on soustraira les surfaces trouvées), et on décompose le polygone en plusieurs polygones qui vérifient les hypothèses attendues si c'est nécessaire (voir le dessin 5 de l'encadré 1).

(b) Toute partie du plan un tant soit peu régulière se laisse approcher par un polygone dont les sommets ont des coordonnées entières, quitte à réduire la taille du quadrillage.

(c) Si vous mesurez les positions des sommets d'un polygone avec une précision limitée, par exemple le millimètre, alors, en prenant le millimètre comme unité pour le quadrillage, les sommets du polygone seront sur le réseau des points de coordonnées entières, et donc le théorème de Pick s'appliquera.

En dehors des applications pratiques au calcul d'aires, le théorème permet de démontrer facilement certains résultats théoriques. L'affirmation selon laquelle un triangle équilatéral ne peut pas avoir ses trois sommets sur une grille carrée est l'un de ces résultats.

En effet, si les sommets d'un triangle équilatéral avaient des coordonnées entières, ce triangle aurait, d'après le théorème de Pick,

une surface de la forme $M/2$, avec M entier (et égal à $2I + B - 2$). Mais d'après le théorème de Pythagore, le côté du triangle serait de la forme $L = \sqrt{a^2 + b^2}$, avec a et b entiers. Puisque la surface d'un triangle équilatéral de côté L est $L^2(\sqrt{3})/4$, on aurait donc $(a^2 + b^2)(\sqrt{3})/4 = M/2$, donc $\sqrt{3}$ serait un quotient de deux entiers... ce qu'on sait être faux.

Notons aussi qu'on peut utiliser le théorème de Pick pour démontrer la formule d'Euler pour les graphes planaires composés de triangles.

GÉNÉRALISATION À L'ESPACE

Une généralisation facile à démontrer de la formule de Pick quand on accepte les trous est $S = I + B/2 - 1 + t$, où t est le nombre de trous. D'autres généralisations du même type existent qui permettent de connaître S en évitant d'avoir à décomposer le polygone, comme suggéré plus haut, mais elles ne sont pas vraiment utiles.

Bien sûr, lorsqu'un théorème valable pour les polygones du plan est découvert, on se demande s'il est possible de trouver un résultat analogue pour l'espace. La question a été soigneusement explorée, et John Reeve, de l'université de Reading, en Angleterre, a proposé une double réponse à cette interrogation.

Il a d'abord montré qu'un résultat aussi simple était impossible en trois dimensions, car

UNE TOUTE NOUVELLE GÉNÉRALISATION

3

Alexander Belyaev et Pierre-Alain Fayolle ont proposé une version nouvelle remarquable du théorème de Pick. Il est étrange que cette version soit restée si longtemps ignorée.

On se donne cette fois un polygone P ayant des sommets à coordonnées entières, possédant éventuellement des trous, dont le bord peut se recouper, et éventuellement en plusieurs morceaux. On s'intéresse à un ensemble de droites parallèles à une direction fixée, par exemple verticale, et passant par les points à coordonnées entières.

On regarde les intersections de ces droites avec P , ce qui donne un ensemble de segments parallèles. En les comptant, on associe trois paramètres à P : E = nombre de segments entre deux points du réseau et entièrement contenus dans P (dessinés en bleu) ; B = nombre de segments entre deux points du réseau et entièrement sur le bord de P (dessinés en rouge) ; P = nombre de segments partiellement dans le polygone et dont une extrémité est un point du réseau (dessinés en jaune).

Les deux chercheurs ont montré que la surface S de P est alors :

$$S = E + B/2 + P/2.$$

Pour le dessin 1, on a $E = 8$, $B = 3$ et $P = 4$, ce qui donne $S = 11,5$.

La direction utilisée pour trouver les segments des décomptes n'est pas nécessairement horizontale ou verticale.

Pour le dessin 2, $E = 2$, $B = 0$ et $P = 19$, ce qui donne $S = 11,5$.

Le réseau peut aussi être triangulaire.

Pour le dessin 3, on a $E = 4$, $B = 1$ et $P = 4$, ce qui donne $S = 6,5$

(l'unité est la surface d'un losange).

