

(a) Si le polygone n'est pas d'un seul tenant, possède des trous ou que son bord se recoupe, il est facile de décomposer le calcul de son aire en utilisant plusieurs fois le théorème de Pick: on l'applique une fois pour chaque trou (on soustraira les surfaces trouvées), et on décompose le polygone en plusieurs polygones qui vérifient les hypothèses attendues si c'est nécessaire (voir le dessin 5 de l'encadré 1).

(b) Toute partie du plan un tant soit peu régulière se laisse approcher par un polygone dont les sommets ont des coordonnées entières, quitte à réduire la taille du quadrillage.

(c) Si vous mesurez les positions des sommets d'un polygone avec une précision limitée, par exemple le millimètre, alors, en prenant le millimètre comme unité pour le quadrillage, les sommets du polygone seront sur le réseau des points de coordonnées entières, et donc le théorème de Pick s'appliquera.

En dehors des applications pratiques au calcul d'aires, le théorème permet de démontrer facilement certains résultats théoriques. L'affirmation selon laquelle un triangle équilatéral ne peut pas avoir ses trois sommets sur une grille carrée est l'un de ces résultats.

En effet, si les sommets d'un triangle équilatéral avaient des coordonnées entières, ce triangle aurait, d'après le théorème de Pick,

une surface de la forme $M/2$, avec M entier (et égal à $2I + B - 2$). Mais d'après le théorème de Pythagore, le côté du triangle serait de la forme $L = \sqrt{a^2 + b^2}$, avec a et b entiers. Puisque la surface d'un triangle équilatéral de côté L est $L^2(\sqrt{3})/4$, on aurait donc $(a^2 + b^2)(\sqrt{3})/4 = M/2$, donc $\sqrt{3}$ serait un quotient de deux entiers... ce qu'on sait être faux.

Notons aussi qu'on peut utiliser le théorème de Pick pour démontrer la formule d'Euler pour les graphes planaires composés de triangles.

GÉNÉRALISATION À L'ESPACE

Une généralisation facile à démontrer de la formule de Pick quand on accepte les trous est $S = I + B/2 - 1 + t$, où t est le nombre de trous. D'autres généralisations du même type existent qui permettent de connaître S en évitant d'avoir à décomposer le polygone, comme suggéré plus haut, mais elles ne sont pas vraiment utiles.

Bien sûr, lorsqu'un théorème valable pour les polygones du plan est découvert, on se demande s'il est possible de trouver un résultat analogue pour l'espace. La question a été soigneusement explorée, et John Reeve, de l'université de Reading, en Angleterre, a proposé une double réponse à cette interrogation.

Il a d'abord montré qu'un résultat aussi simple était impossible en trois dimensions, car

UNE TOUTE NOUVELLE GÉNÉRALISATION

3

Alexander Belyaev et Pierre-Alain Fayolle ont proposé une version nouvelle remarquable du théorème de Pick. Il est étrange que cette version soit restée si longtemps ignorée.

On se donne cette fois un polygone P ayant des sommets à coordonnées entières, possédant éventuellement des trous, dont le bord peut se recouper, et éventuellement en plusieurs morceaux. On s'intéresse à un ensemble de droites parallèles à une direction fixée, par exemple verticale, et passant par les points à coordonnées entières.

On regarde les intersections de ces droites avec P , ce qui donne un ensemble de segments parallèles. En les comptant, on associe trois paramètres à P : E = nombre de segments entre deux points du réseau et entièrement contenus dans P (dessinés en bleu) ; B = nombre de segments entre deux points du réseau et entièrement sur le bord de P (dessinés en rouge) ; P = nombre de segments partiellement dans le polygone et dont une extrémité est un point du réseau (dessinés en jaune).

Les deux chercheurs ont montré que la surface S de P est alors :

$$S = E + B/2 + P/2.$$

Pour le dessin 1, on a $E = 8$, $B = 3$ et $P = 4$, ce qui donne $S = 11,5$.

La direction utilisée pour trouver les segments des décomptes n'est pas nécessairement horizontale ou verticale.

Pour le dessin 2, $E = 2$, $B = 0$ et $P = 19$, ce qui donne $S = 11,5$. Le réseau peut aussi être triangulaire.

Pour le dessin 3, on a $E = 4$, $B = 1$ et $P = 4$, ce qui donne $S = 6,5$ (l'unité est la surface d'un losange).

