

(a) Si le polygone n'est pas d'un seul tenant, possède des trous ou que son bord se recoupe, il est facile de décomposer le calcul de son aire en utilisant plusieurs fois le théorème de Pick: on l'applique une fois pour chaque trou (on soustraira les surfaces trouvées), et on décompose le polygone en plusieurs polygones qui vérifient les hypothèses attendues si c'est nécessaire (voir le dessin 5 de l'encadré 1).

(b) Toute partie du plan un tant soit peu régulière se laisse approcher par un polygone dont les sommets ont des coordonnées entières, quitte à réduire la taille du quadrillage.

(c) Si vous mesurez les positions des sommets d'un polygone avec une précision limitée, par exemple le millimètre, alors, en prenant le millimètre comme unité pour le quadrillage, les sommets du polygone seront sur le réseau des points de coordonnées entières, et donc le théorème de Pick s'appliquera.

En dehors des applications pratiques au calcul d'aires, le théorème permet de démontrer facilement certains résultats théoriques. L'affirmation selon laquelle un triangle équilatéral ne peut pas avoir ses trois sommets sur une grille carrée est l'un de ces résultats.

En effet, si les sommets d'un triangle équilatéral avaient des coordonnées entières, ce triangle aurait, d'après le théorème de Pick,

une surface de la forme $M/2$, avec M entier (et égal à $2I + B - 2$). Mais d'après le théorème de Pythagore, le côté du triangle serait de la forme $L = \sqrt{a^2 + b^2}$, avec a et b entiers. Puisque la surface d'un triangle équilatéral de côté L est $L^2(\sqrt{3})/4$, on aurait donc $(a^2 + b^2)(\sqrt{3})/4 = M/2$, donc $\sqrt{3}$ serait un quotient de deux entiers... ce qu'on sait être faux.

Notons aussi qu'on peut utiliser le théorème de Pick pour démontrer la formule d'Euler pour les graphes planaires composés de triangles.

GÉNÉRALISATION À L'ESPACE

Une généralisation facile à démontrer de la formule de Pick quand on accepte les trous est $S = I + B/2 - 1 + t$, où t est le nombre de trous. D'autres généralisations du même type existent qui permettent de connaître S en évitant d'avoir à décomposer le polygone, comme suggéré plus haut, mais elles ne sont pas vraiment utiles.

Bien sûr, lorsqu'un théorème valable pour les polygones du plan est découvert, on se demande s'il est possible de trouver un résultat analogue pour l'espace. La question a été soigneusement explorée, et John Reeve, de l'université de Reading, en Angleterre, a proposé une double réponse à cette interrogation.

Il a d'abord montré qu'un résultat aussi simple était impossible en trois dimensions, car

UNE TOUTE NOUVELLE GÉNÉRALISATION

3

Alexander Belyaev et Pierre-Alain Fayolle ont proposé une version nouvelle remarquable du théorème de Pick. Il est étrange que cette version soit restée si longtemps ignorée.

On se donne cette fois un polygone P ayant des sommets à coordonnées entières, possédant éventuellement des trous, dont le bord peut se recouper, et éventuellement en plusieurs morceaux. On s'intéresse à un ensemble de droites parallèles à une direction fixée, par exemple verticale, et passant par les points à coordonnées entières.

On regarde les intersections de ces droites avec P , ce qui donne un ensemble de segments parallèles. En les comptant, on associe trois paramètres à P : E = nombre de segments entre deux points du réseau et entièrement contenus dans P (dessinés en bleu) ; B = nombre de segments entre deux points du réseau et entièrement sur le bord de P (dessinés en rouge) ; P = nombre de segments partiellement dans le polygone et dont une extrémité est un point du réseau (dessinés en jaune).

Les deux chercheurs ont montré que la surface S de P est alors :

$$S = E + B/2 + P/2.$$

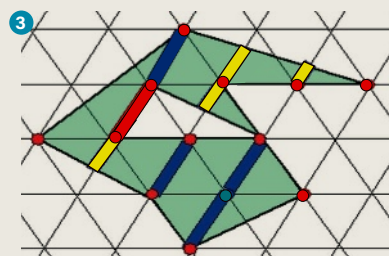
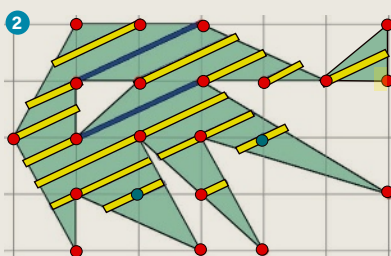
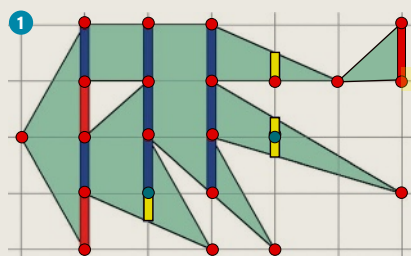
Pour le dessin 1, on a $E = 8$, $B = 3$ et $P = 4$, ce qui donne $S = 11,5$.

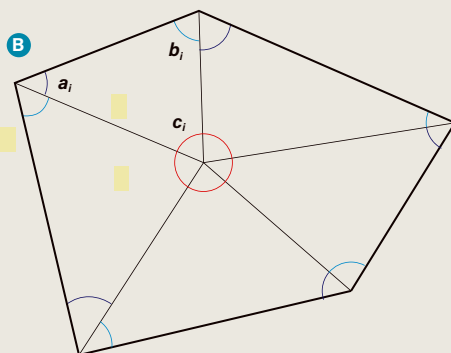
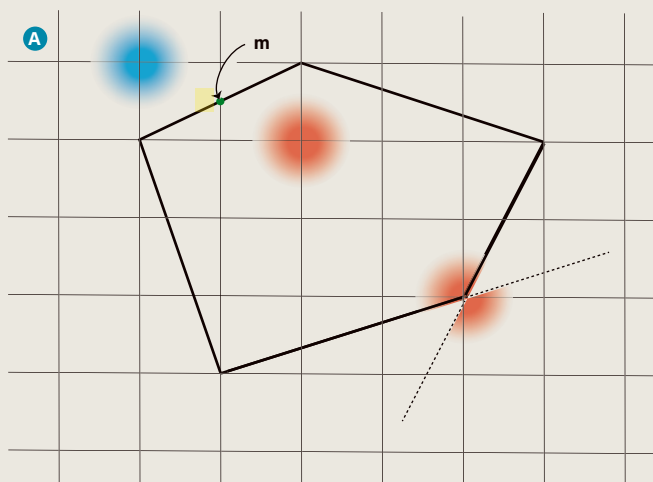
La direction utilisée pour trouver les segments des décomptes n'est pas nécessairement horizontale ou verticale.

Pour le dessin 2, $E = 2$, $B = 0$ et $P = 19$, ce qui donne $S = 11,5$.

Le réseau peut aussi être triangulaire.

Pour le dessin 3, on a $E = 4$, $B = 1$ et $P = 4$, ce qui donne $S = 6,5$ (l'unité est la surface d'un losange).





$$\sum (a_i + b_i + c_i) = \sum (a_i + b_i) + 1 \text{ tour}$$

$$\sum (a_i + b_i) = n \times 1/2 \text{ tour} - 1 \text{ tour}$$

4

UNE ANALOGIE PHYSIQUE POUR DÉMONSTRER LE THÉORÈME

Voici une troublante démonstration physique du théorème de Pick, due à Christian Blatter, de l'école polytechnique fédérale de Zurich, et utilisant la diffusion de la chaleur. Soit P un polygone conforme aux hypothèses du théorème de Pick. Supposons qu'au temps 0, une unité de chaleur soit concentrée en chaque point (de coordonnées entières) du réseau infini. Cette chaleur diffuse ensuite dans la totalité du plan par conduction thermique, de façon isotrope dans un angle de 2π (un tour). Au bout d'un temps infini, elle est également répartie sur le plan avec une densité uniforme : la quantité de chaleur contenue dans le polygone P est la surface S de P .

D'où vient cette chaleur ? Chaque point du réseau intérieur au polygone contribue pour une unité

de chaleur, soit, au total, I . La chaleur émise par un point du réseau (rouge) qui est perdue lors de la traversée d'un côté du polygone est en effet compensée par la chaleur envoyée par le point (bleu) extérieur au polygone symétrique par rapport au milieu m du côté.

Chaque point du réseau situé sur le bord du polygone et qui n'est pas un sommet envoie dans le polygone la moitié de la quantité de chaleur émise de façon isotrope ; dans le cas d'un sommet, cette quantité est proportionnelle à l'angle au sommet en ce point (voir la figure A). Or, la somme des angles aux sommets d'un polygone à n côtés est $n/2$ tours moins 1, ce que l'on démontre facilement en triangulant le polygone (voir la figure B). D'où la contribution calorifique $B/2 - 1$ de la formule de Pick.

il ne peut pas exister, pour le volume d'un polyèdre ayant des sommets à coordonnées entières dans l'espace, de formule qui ne dépende que des trois paramètres suivants : nombre de points du réseau à l'intérieur du polyèdre, nombre de points du réseau sur les arêtes et nombre de points du réseau sur les faces.

On peut le voir grâce à la famille de tétraèdres T_h dépendant du paramètre h et ayant pour quatre sommets les points $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$, $(0,0,h)$, avec h entier. Ces tétraèdres ne possèdent aucun point du réseau ni à l'intérieur de leur volume, ni sur leurs faces ou arêtes. Par conséquent, si la formule existait, elle fournirait le même résultat pour tous les T_h , alors que leur volume, $h/6$, varie avec h .

C'est un peu décevant. En cherchant des formules un peu moins simples, John Reeve est cependant parvenu à trouver et à démontrer un résultat qui peut être vu comme une généralisation pour l'espace du théorème de Pick.

Soit P un polyèdre (ses faces sont donc des polygones) ayant des sommets à coordonnées entières, dont on suppose qu'il n'a pas de trou et que sa surface ne se recoupe pas. On considère un entier n plus grand que 2 et le polyèdre P_n déduit de P en multipliant toutes les coordonnées par n . P_n est donc une version agrandie de P . On note I et I_n le nombre de points du réseau intérieurs à P et P_n respectivement, et B et B_n le nombre de points du réseau sur les faces et arêtes de P et P_n . La formule suivante donne alors le volume V de P :

$$V = [2I_n - B_n - n(2I - B)] / [2n(n-1)(n+1)].$$

Cette formule a par la suite été généralisée pour des espaces de dimension supérieure à 3 par Ian Macdonald (*The Volume of a Lattice Polyhedron*, Proc. Camb. Phil., 2008), ce qui a été le point de départ d'autres travaux encore, mais nous ferait quitter le domaine des mathématiques récréatives !

UNE JOLIE GÉNÉRALISATION OUBLIÉE

De façon étonnante – le théorème de Pick ayant fait l'objet d'une attention soutenue depuis plus d'un siècle –, une généralisation remarquable, qui n'a été publiée qu'en 2019 par Alexander Belyaev, de l'université d'Édimbourg, en Écosse, et Pierre-Alain Fayolle, de l'université d'Aizu, au Japon, semble être passée inaperçue.

Revenons au plan et aux points de coordonnées entières. On s'intéresse cette fois à un ensemble de droites parallèles à une direction fixée (par exemple verticale) passant par les points à coordonnées entières. On regarde les intersections de ces droites avec le polygone, et on distingue trois sortes de segments :