

UNE AUTRE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE PICK

5

On dénomme « triangles minces » les triangles dont les sommets sont sur le réseau des points à coordonnées entières et qui n'ont aucun point du réseau dans leur intérieur ni sur leurs côtés.

A/ La surface d'un triangle mince est 1/2.

En collant à un tel triangle le même triangle tourné de 180° sur l'un de ses côtés, on forme un parallélogramme. En translatant ce parallélogramme une fois, deux fois, etc., on obtient une bande de largeur constante. En translatant cette bande une fois, deux fois, etc., on obtient un pavage du plan où chaque point du réseau touche 6 triangles minces. Puisque chaque triangle mince passe par trois points du réseau, la densité des triangles minces

est deux fois supérieure à celle des points du réseau, qui est 1, et donc la surface du triangle mince est 1/2.

B/ Tout polygone du théorème de Pick se décompose en un nombre fini de triangles minces.

En effet, chaque carré entièrement inclus dans le polygone se décompose en deux triangles minces. Une fois cette décomposition partielle faite, en joignant les points du réseau sur le bord du polygone aux points internes les plus proches, on crée une décomposition complète du polygone en triangles minces.

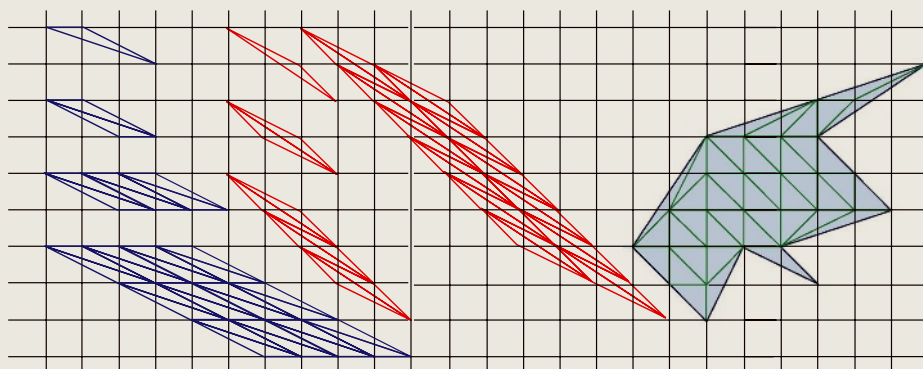
C/ Si on ajoute un triangle mince à un polygone qui vérifie le théorème de Pick, on crée un polygone qui vérifie encore le théorème. En effet, si le triangle ajouté est collé par un côté unique,

alors I reste identique et B est augmenté de 1, donc $I + B/2 - 1$ est augmenté de 1/2, comme S .

Si le triangle ajouté est collé à deux côtés, alors I augmente de 1 et B diminue de 1 donc $I + B/2 - 1$ augmente de 1/2, comme S .

D/ Fin du raisonnement

Un triangle mince vérifie le théorème de Pick. En effet, $I = 0$, $B = 3$ et donc $I + B/2 - 1 = 1/2$. Partant d'un triangle mince de la décomposition du polygone en triangles minces, et ajoutant un à un les autres triangles minces (choisis à chaque étape pour les coller par un côté ou deux côtés à ceux déjà en place), on reconstitue le polygone qui, d'après la partie précédente du raisonnement, vérifie le théorème de Pick.



a) Les segments entre deux points du réseau, entièrement contenus dans le polygone; on note E leur nombre;

b) les segments entre deux points du réseau, situés sur le bord du polygone; on note B leur nombre;

c) les segments partiellement dans le polygone et dont une extrémité est un point du réseau; on note P leur nombre.

Le théorème indique alors que la surface du polygone ne dépend que de ces trois paramètres et qu'elle est donnée par la formule $S = E + B/2 + P/2$. Le résultat est valable même si le polygone n'est pas d'un seul tenant, s'il y a des trous ou si son bord se recoupe (voir l'encadré 3).

Le plus surprenant concernant cette formule est qu'elle est valide avec les droites verticales, avec les droites horizontales, mais aussi avec des droites obliques. Plus étonnant encore: si le réseau n'est pas carré mais triangulaire, la même formule fonctionne encore. D'autres extensions que nous ne mentionnons pas ici sont possibles.

Les auteurs racontent que l'idée de leur nouveau théorème provient d'une démonstration tirée de la physique fondée sur la diffusion de la chaleur (voir l'encadré 4), ce qui montre, encore une fois, que disposer de plusieurs démonstrations pour un même résultat est utile en mathématiques! ■

BIBLIOGRAPHIE

A. Belyaev et P. A. Fayolle, **Counting parallel segments : New variants of Pick's area**, *Math Intelligencer*, 2019.

M. Aigner et G. M. Ziegler, **Proofs from the Book**, Springer, 2018.

C. Blatter, **Another proof of Pick's area theorem**, *Mathematics Magazine*, 1997.

J. Reeve, **On the volume of lattice polyhedra**, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1957.

G. Pick, **Geometrisches zur Zahlenlehre**, *Sitzungsberichte des Deutschen Naturwissenschaftlich-Medicinischen Vereines für Böhmen "Lotos" in Prag*, 1899.

LES AUTEURS



**JEAN-MICHEL COURTY
ET ÉDOUARD KIERLIK**
professeurs de physique
à Sorbonne Université, à Paris

POUR UN « STRIKE » PARFAIT

Au bowling, faire tomber toutes les quilles d'un coup (le « strike ») requiert d'exploiter l'huile qui recouvre la piste, l'asymétrie du cœur de la boule et bien d'autres subtilités physiques.

Après cinq pas d'élan, l'homme vêtu d'un survêtement violet lance sa boule en lui imprimant un mouvement de rotation. La trajectoire rectiligne que prend la boule au départ semble la conduire irrémédiablement vers la gouttière. Le coup serait-il raté? Pas du tout: au dernier moment, la trajectoire de la boule s'incurve et celle-ci vient frapper la quille centrale, puis les trois quilles situées juste derrière elle. Projetées avec force, ces quilles font chuter toutes les autres et c'est le *strike*! Jesús Quintana exulte, il est fin prêt pour le match prévu contre le Dude et son équipe (dans le film *The Big Lebowski*, des frères Cohen). C'est que « personne ne manque de respect à Jesús », surtout après un *strike*. Comment a-t-il fait? L'effet donné à la boule lors du lancer est un ingrédient important, mais au bowling comme ailleurs, l'essentiel est

invisible pour les yeux. Huilage de la piste, revêtement de la boule et noyau non sphérique sont au cœur des subtilités les plus importantes de la physique du bowling.

UN JEU DE QUILLES À BALAYER

L'objectif du bowling est de faire tomber 10 quilles organisées en triangle (voir la figure ci-dessus) en les percutant avec une boule. Plus facile à dire qu'à faire... Une difficulté tient à la distance à laquelle elles se trouvent: à l'extrémité d'une piste longue de 60 pieds (soit 18,29 mètres). Une autre résulte de l'écartement entre les quilles: les deux situées à la base du triangle sont sur les bords de la piste dont la largeur est 1,05 mètre. Enfin, aucun rebond n'est possible sur les bords de la piste: deux

gouttières sont placées de part et d'autre, de sorte que si la boule y tombe, elle ne revient plus sur la piste.

Comment dès lors faire tomber toutes les quilles en un seul lancer et faire un *strike*? La solution la plus efficace est de provoquer une réaction en chaîne (voir la figure ci-dessus, à droite) en frappant avec la boule d'abord les quilles 1 et 3 de sorte que la première renverse les quilles 2, 4 et 7, la seconde les 6 et 10. La boule heurte ensuite les quilles 5 et 9, la 5 faisant enfin tomber la 8 (pour un gaucher, la séquence est symétrique).

Réussir toutes ces collisions requiert que la boule transmette assez d'énergie aux quilles frappées, et notamment la 1 jusqu'à la 9. Elle doit donc être suffisamment lourde et rapide. La masse des quilles étant réglementairement

