

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
 P.86 Art & science
 P.88 Idées de physique
 P.92 Chroniques de l'évolution
 P.96 Science & gastronomie
 P.98 À picorer

L'UNIVERS FABULEUX DE 2^n

En multipliant 2 par lui-même un grand nombre de fois on produit des suites de chiffres aux structures inattendues.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au
 laboratoire Cristal
 (Centre de recherche
 en informatique, signal
 et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

La suite des puissances de 2 écrites en base 10 est bien connue, du moins pour ses premiers termes: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1 024, 2 048, ... Elle est utilisée en informatique, où elle fixe par exemple les unités pour mesurer les quantités de mémoire: un kilooctet (Ko) représente $2^{10}=1024$ octets (groupes de 8 bits), un mégaoctet (Mo) représente $2^{20}=1048576$ octets, un gigaoctet (Go) représente $2^{30}=1073741824$ octets. Viennent ensuite les téraoctets, pétaoctets, exaoctets, zettaoctets, yottaoctets pour 2^{40} , 2^{50} , 2^{60} , 2^{70} , 2^{80} octets.

L'esprit a des difficultés à saisir ce qu'est la croissance exponentielle des puissances de 2. C'est la base du classique problème des nénuphars: «Un étang est recouvert en 30 jours par un nénuphar qui double la surface occupée chaque jour. Combien faut-il de jours à deux nénuphars pour recouvrir l'étang?» La réponse n'est pas 15 (voir des commentaires dans l'encadré 1).

La fascination pour les puissances de 2 et notre incapacité de saisir la vitesse de croissance sont anciennes. Elles sont au cœur de l'histoire du remplissage de l'échiquier. On trouve des traces de ce récit en Inde dès le XIII^e siècle. Le créateur du jeu d'échecs aurait demandé à son souverain comme récompense pour son invention que l'on dépose un grain de blé sur la première case de l'échiquier, deux sur la deuxième case, quatre sur la troisième, etc. Le souverain aurait ri de ce qu'il lui semblait un bien maigre prix pour la brillante invention. Après de pénibles calculs, le trésorier lui aurait appris que le

nombre de grains de blé demandés dépassait la production du royaume. Les versions diffèrent pour la fin de l'histoire: l'inventeur serait devenu un conseiller de haut rang ou aurait été exécuté. Pour mener le calcul, on utilise la formule facile à démontrer que:

$$1+2+2^2+\dots+2^n=2^{n+1}-1,$$

$$\text{soit } 1+2+2^2+\dots+2^{63}=2^{64}-1$$

=18446744073709551615 grains de blé au total: plus de 1000 fois la production mondiale annuelle de blé!

Notre difficulté à appréhender ce que représente 2^n apparaît dans une multitude de situations mathématiques (voir l'encadré 3). D'autre part, les chiffres qu'on voit apparaître quand on écrit explicitement 2^n intriguent. Ces chiffres suivent-ils des règles?

LES CHIFFRES À DROITE DE 2^n

La réponse est plus complexe qu'on ne l'imagine. Concentrons-nous sur le chiffre le plus à droite, ou chiffre des unités. Ce chiffre est nécessairement pair, bien évidemment. Quelques calculs montrent qu'il suit une règle périodique: la séquence 2, 4, 8, 6 se répète indéfiniment: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048... La démonstration est facile:

$$2 \times (10k+2) = 20k+4 = (2k) \times 10 + 4$$

donc le double d'un nombre se terminant par 2 se termine par 4. De $2 \times (10k+4) = 10 \times (2k) + 8$ on tire que le double d'un nombre se terminant par 4 se termine par 8. Le reste vient avec:

$$2 \times (10k+8) = 10 \times (2k+1) + 6$$

$$\text{et } 2 \times (10k+6) = 10 \times (2k+1) + 2.$$