

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
P.86 Art & science
P.88 Idées de physique
P.92 Chroniques de l'évolution
P.96 Science & gastronomie
P.98 À picorer

L'UNIVERS FABULEUX DE 2^n

En multipliant 2 par lui-même un grand nombre de fois on produit des suites de chiffres aux structures inattendues.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au
laboratoire Cristal
(Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille)

La suite des puissances de 2 écrites en base 10 est bien connue, du moins pour ses premiers termes: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1 024, 2 048, ... Elle est utilisée en informatique, où elle fixe par exemple les unités pour mesurer les quantités de mémoire: un kilooctet (Ko) représente $2^{10}=1024$ octets (groupes de 8 bits), un mégaoctet (Mo) représente $2^{20}=1048576$ octets, un gigaoctet (Go) représente $2^{30}=1073741824$ octets. Viennent ensuite les téraoctets, pétaoctets, exaoctets, zettaoctets, yottaoctets pour 2^{40} , 2^{50} , 2^{60} , 2^{70} , 2^{80} octets.

L'esprit a des difficultés à saisir ce qu'est la croissance exponentielle des puissances de 2. C'est la base du classique problème des nénuphars: «Un étang est recouvert en 30 jours par un nénuphar qui double la surface occupée chaque jour. Combien faut-il de jours à deux nénuphars pour recouvrir l'étang?» La réponse n'est pas 15 (voir des commentaires dans l'encadré 1).

La fascination pour les puissances de 2 et notre incapacité de saisir la vitesse de croissance sont anciennes. Elles sont au cœur de l'histoire du remplissage de l'échiquier. On trouve des traces de ce récit en Inde dès le XIII^e siècle. Le créateur du jeu d'échecs aurait demandé à son souverain comme récompense pour son invention que l'on dépose un grain de blé sur la première case de l'échiquier, deux sur la deuxième case, quatre sur la troisième, etc. Le souverain aurait ri de ce qu'il lui semblait un bien maigre prix pour la brillante invention. Après de pénibles calculs, le trésorier lui aurait appris que le

nombre de grains de blé demandés dépassait la production du royaume. Les versions diffèrent pour la fin de l'histoire: l'inventeur serait devenu un conseiller de haut rang ou aurait été exécuté. Pour mener le calcul, on utilise la formule facile à démontrer que:

$$1+2+2^2+\dots+2^n=2^{n+1}-1,$$

soit $1+2+2^2+\dots+2^{63}=2^{64}-1$
=18446744073709551615 grains de blé au total:
plus de 1000 fois la production mondiale annuelle de blé!

Notre difficulté à appréhender ce que représente 2^n apparaît dans une multitude de situations mathématiques (voir l'encadré 3). D'autre part, les chiffres qu'on voit apparaître quand on écrit explicitement 2^n intriguent. Ces chiffres suivent-ils des règles?

LES CHIFFRES À DROITE DE 2^n

La réponse est plus complexe qu'on ne l'imagine. Concentrons-nous sur le chiffre le plus à droite, ou chiffre des unités. Ce chiffre est nécessairement pair, bien évidemment. Quelques calculs montrent qu'il suit une règle périodique: la séquence 2, 4, 8, 6 se répète indéfiniment: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048... La démonstration est facile:

$$2 \times (10k+2) = 20k+4 = (2k) \times 10 + 4$$

donc le double d'un nombre se terminant par 2 se termine par 4. De $2 \times (10k+4) = 10 \times (2k) + 8$ on tire que le double d'un nombre se terminant par 4 se termine par 8. Le reste vient avec:

$$2 \times (10k+8) = 10 \times (2k+1) + 6$$

et $2 \times (10k+6) = 10 \times (2k+1) + 2.$



Jean-Paul Delahaye a notamment publié: **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

En faisant tendre n vers l'infini, on rencontrera donc comme chiffre des unités de 2^n une proportion de 25% de 2, autant de 4, de 8 et de 6 et une proportion nulle de 0, 1, 3, 5, 7 et 9. C'est ce qu'indique la première ligne du tableau de l'encadré 2.

Considérons maintenant les deux chiffres les plus à droite de 2^n . On découvre sans mal que la suite commence par: 02, 04, 08, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48, 96, 92, 84, 68, 36, 72, 44, 88, 76, 52, 04. En raisonnant comme précédemment, on en déduit donc qu'une fois revenu à 04 tout recommence avec une période 20. En particulier une puissance de 2 ne se termine jamais par 00, par 06 ou par 14 ou n'importe quel couple non présent dans la liste. On remarque que deux des nombres de la période ont 0 comme chiffre des dizaines (04, 08), que deux aussi ont 1 comme chiffre des dizaines (16, 12), etc. La répartition pour le deuxième chiffre de 2^n est donc uniforme, chacun ayant une fréquence d'apparition de 10%. C'est ce qu'indique la deuxième ligne du tableau de l'encadré 2, qui a été calculé directement par ordinateur. On établit par le

raisonnement et on le vérifie avec un programme que les k derniers chiffres de 2^n donnent un résultat périodique de période $4 \times 5^{k-1}$, qui commence à partir du terme 2^k .

En examinant la partie périodique de cette séquence avec un programme, j'ai vérifié pour $k=3, 4, \dots, 11$ que, comme pour le deuxième chiffre à partir de la droite, chacun des chiffres 0, 1, 2, ..., 9 apparaît exactement avec la fréquence de 1/10 quand on s'intéresse au k -ième chiffre à partir de la droite de 2^n . Le résultat affirmant que cela reste vrai au-delà de 11 a été démontré par le mathématicien Michael Fuchs en 2002 (voir la bibliographie).

LES CHIFFRES À GAUCHE DE 2^n

Venons-en maintenant aux chiffres de 2^n observés à partir de la gauche. Commençons par celui en tête, le premier chiffre significatif: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1 024, 2 048... Sans réfléchir, on s'attend à ce qu'il y en ait 1/10 de chaque sorte. C'est idiot puisque 0 n'est pas un chiffre possible à gauche. On a alors envie de dire qu'à la suite de ce qu'on a vu pour les chiffres comptés à partir de la

LE PROBLÈME DU NÉNUPHAR

1

« Un étang a été recouvert en 30 jours par un nénuphar, qui double la surface occupée chaque jour. Combien aurait-il fallu de jours à deux nénuphars pour recouvrir l'étang ? »

Trop de précipitation peut vous faire répondre 15 jours, ce qui est faux. La solution du problème est classique : « Le nénuphar seul couvre la moitié de l'étang en 29 jours, pour, en doublant sa surface, recouvrir l'étang entier en 30 jours. Deux nénuphars recouvrent chacun la moitié de l'étang en 29 jours, donc la totalité. » Cependant, ce problème et la certitude que nous avons bien compris la solution de 29 jours illustrent notre mauvaise perception de ce qu'est une croissance en 2^n . On doit en effet formuler deux remarques sur ce problème classique et sa solution.

1. Le rayon d'un nénuphar est d'environ 10 cm, donc sa surface est d'environ 300 cm^2 ; en trente jours de doublement, la surface du nénuphar de l'histoire occuperait donc $300 \times 2^{30} \text{ cm}^2$, soit environ 30 km^2 . Ce ne serait plus un étang mais un lac de la taille de celui d'Annecy ! Notre incapacité d'évaluer les puissances de 2 nous empêche de percevoir l'absurdité



de l'histoire ou du moins de sa formulation.

2. Lorsqu'une plante ou une épidémie s'étend de proche en proche sur un plan, on parle fréquemment de « croissance exponentielle ». C'est une erreur. Lorsqu'une plante s'étend ou lorsqu'une épidémie contamine une zone de plus en plus grande, la diffusion se fait à une vitesse presque constante autour d'un point de départ. La croissance des surfaces concernées, qui est aussi proportionnelle à celles des sujets concernés dans le cas d'une épidémie, n'est pas exponentielle mais « quadratique ». En effet, la distance au point de départ croît linéairement

(proportionnellement au temps t) et donc la surface concernée croît quadratiquement (proportionnellement à t^2). Cette croissance est certes très rapide, mais l'est beaucoup moins qu'une croissance exponentielle (en k^t). Le nombre 100^2 est par exemple beaucoup plus petit que 2^{100} . L'incapacité de notre esprit à faire clairement la distinction entre les deux modes de croissance conduit à l'erreur courante de parler de croissance exponentielle dans des circonstances indues. Le doublement journalier du nénuphar pendant 30 jours n'est pas un modèle raisonnable pour la façon dont il s'étend.