

En faisant tendre n vers l'infini, on rencontrera donc comme chiffre des unités de 2^n une proportion de 25% de 2, autant de 4, de 8 et de 6 et une proportion nulle de 0, 1, 3, 5, 7 et 9. C'est ce qu'indique la première ligne du tableau de l'encadré 2.

Considérons maintenant les deux chiffres les plus à droite de 2^n . On découvre sans mal que la suite commence par: 02, 04, 08, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48, 96, 92, 84, 68, 36, 72, 44, 88, 76, 52, 04. En raisonnant comme précédemment, on en déduit donc qu'une fois revenu à 04 tout recommence avec une période 20. En particulier une puissance de 2 ne se termine jamais par 00, par 06 ou par 14 ou n'importe quel couple non présent dans la liste. On remarque que deux des nombres de la période ont 0 comme chiffre des dizaines (04, 08), que deux aussi ont 1 comme chiffre des dizaines (16, 12), etc. La répartition pour le deuxième chiffre de 2^n est donc uniforme, chacun ayant une fréquence d'apparition de 10%. C'est ce qu'indique la deuxième ligne du tableau de l'encadré 2, qui a été calculé directement par ordinateur. On établit par le

raisonnement et on le vérifie avec un programme que les k derniers chiffres de 2^n donnent un résultat périodique de période $4 \times 5^{k-1}$, qui commence à partir du terme 2^k .

En examinant la partie périodique de cette séquence avec un programme, j'ai vérifié pour $k=3, 4, \dots, 11$ que, comme pour le deuxième chiffre à partir de la droite, chacun des chiffres 0, 1, 2, ..., 9 apparaît exactement avec la fréquence de 1/10 quand on s'intéresse au k -ième chiffre à partir de la droite de 2^n . Le résultat affirmant que cela reste vrai au-delà de 11 a été démontré par le mathématicien Michael Fuchs en 2002 (voir la bibliographie).

LES CHIFFRES À GAUCHE DE 2^n

Venons-en maintenant aux chiffres de 2^n observés à partir de la gauche. Commençons par celui en tête, le premier chiffre significatif: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1 024, 2 048... Sans réfléchir, on s'attend à ce qu'il y en ait 1/10 de chaque sorte. C'est idiot puisque 0 n'est pas un chiffre possible à gauche. On a alors envie de dire qu'à la suite de ce qu'on a vu pour les chiffres comptés à partir de la

LE PROBLÈME DU NÉNUPHAR

« Un étang a été recouvert en 30 jours par un nénuphar, qui double la surface occupée chaque jour. Combien aurait-il fallu de jours à deux nénuphars pour recouvrir l'étang ? »

Trop de précipitation peut vous faire répondre 15 jours, ce qui est faux. La solution du problème est classique : « Le nénuphar seul couvre la moitié de l'étang en 29 jours, pour, en doublant sa surface, recouvrir l'étang entier en 30 jours. Deux nénuphars recouvrent chacun la moitié de l'étang en 29 jours, donc la totalité. » Cependant, ce problème et la certitude que nous avons bien compris la solution de 29 jours illustrent notre mauvaise perception de ce qu'est une croissance en 2^n . On doit en effet formuler deux remarques sur ce problème classique et sa solution.

1. Le rayon d'un nénuphar est d'environ 10 cm, donc sa surface est d'environ 300 cm^2 ; en trente jours de doublement, la surface du nénuphar de l'histoire occuperait donc $300 \times 2^{30} \text{ cm}^2$, soit environ 30 km^2 . Ce ne serait plus un étang mais un lac de la taille de celui d'Annecy ! Notre incapacité d'évaluer les puissances de 2 nous empêche de percevoir l'absurdité



de l'histoire ou du moins de sa formulation.

2. Lorsqu'une plante ou une épidémie s'étend de proche en proche sur un plan, on parle fréquemment de « croissance exponentielle ». C'est une erreur. Lorsqu'une plante s'étend ou lorsqu'une épidémie contamine une zone de plus en plus grande, la diffusion se fait à une vitesse presque constante autour d'un point de départ. La croissance des surfaces concernées, qui est aussi proportionnelle à celles des sujets concernés dans le cas d'une épidémie, n'est pas exponentielle mais « quadratique ». En effet, la distance au point de départ croît linéairement

(proportionnellement au temps t) et donc la surface concernée croît quadratiquement (proportionnellement à t^2). Cette croissance est certes très rapide, mais l'est beaucoup moins qu'une croissance exponentielle (en k^t). Le nombre 100^2 est par exemple beaucoup plus petit que 2^{100} . L'incapacité de notre esprit à faire clairement la distinction entre les deux modes de croissance conduit à l'erreur courante de parler de croissance exponentielle dans des circonstances indues. Le doublement journalier du nénuphar pendant 30 jours n'est pas un modèle raisonnable pour la façon dont il s'étend.