

2

LES CHIFFRES À DROITE ET À GAUCHE DE 2ⁿ

droite, il y a uniformité entre ceux possibles, 1, 2, ..., 9, et donc: la fréquence de chaque chiffre non nul quand n tend vers l'infini doit être de $1/9$. C'est faux, comme le montre l'exploration numérique par ordinateur.

Ce qui se passe en tête des chiffres de 2^n est surprenant. Les dernières lignes du tableau 1 de l'encadré 2 ont été calculées par programme en prenant les 2^n jusqu'à $n=30\,000$. La fréquence n'est pas du tout uniforme pour les chiffres non nuls en première position à gauche (dernière ligne du tableau). Le premier chiffre est un 1 dans plus de 30% des 2^n (case tout en bas à gauche). Les fréquences calculées pour 2, 3, etc. décroissent pour arriver à 4,6% pour le chiffre 9 (case en bas à droite).

Pour l'avant-dernière ligne, le même phénomène de décroissance se produit. Il est cependant moins contrasté. Plus on remonte dans le tableau, plus les proportions s'égalisent en s'approchant toutes de $1/10$.

En 1968, le mathématicien russe Vladimir Arnold, associé au mathématicien français André Avez, a démontré que la suite de 2^n satisfait la loi de (Frank) Benford. Celle-ci indique que pour le premier chiffre significatif, la proportion de chiffres c est $\log_{10}(1+1/c)$. Cette loi retrouve, avec deux décimales exactes, les valeurs que l'ordinateur a calculées (pour des précisions sur la loi de Benford, voir la bibliographie).

Pour le deuxième chiffre à partir de la gauche, qui peut maintenant être un 0, nous avons remarqué que la deuxième ligne à partir du bas sur le tableau calculé expérimentalement donne des fréquences décroissantes plus atténuées que la ligne finale: la fréquence des nombres dont le deuxième chiffre à gauche est c diminue à mesure que c augmente, passant de 12% pour 0 à 8,4% pour 9.

L'explication est encore donnée par la loi de Benford. En effet la loi de Benford pour les 2^n est vraie dans toute base de numération $b > 1$: en base b la proportion de c en première position à gauche est $\log_b(1+1/c)$. En particulier pour la base $b=100$, on connaît donc, grâce au résultat d'Arnold et Avez, la fréquence des chiffres 00, 01, ..., 99 (en base 100, il y a 100 chiffres différents). La fréquence de 0 en deuxième position en base 10 est donc obtenue à partir de la somme des fréquences pour 10, 20, 30, ... 90 en base 100. Pour le chiffre 1 en deuxième position en base 10 à gauche, on considérera les chiffres de la base 100: 11, 21, 31, ..., 91, etc. En faisant les calculs de ce qu'indique la loi de Benford pour la base 100 et en comparant à ce que le programme a donné avec les 2^n de 1 à 30 000, on trouve une concordance très satisfaisante avec deux chiffres significatifs.

Pour le troisième chiffre en base 10 à partir de la gauche, le même genre de considérations

La partie supérieure du tableau du haut indique la fréquence des 0, des 1, des 2, ..., des 9 quand on considère le chiffre des unités (chiffre n° 1 à droite) de 2^n , le chiffre en deuxième position à partir de la droite (chiffre n° 2 à droite) de 2^n , etc. On voit qu'à l'exception de la première ligne (celle du chiffre des unités) chaque chiffre se présente avec une fréquence de $1/10$ en position k à partir de la droite.

La partie inférieure du tableau indique la fréquence des 0, des 1, ..., des 9 quand on considère le chiffre le plus à gauche de 2^n (« premier chiffre significatif »), le deuxième, etc. Là, même si cela semble contredire la partie supérieure du tableau, les fréquences sont loin d'être uniformes. Elles le deviennent petit à petit quand on remonte vers le haut du tableau.

Même si cela semble paradoxal, il faut comprendre qu'il n'y a aucune contradiction entre le fait que dans la partie supérieure à partir de la deuxième ligne il n'y a que des $1/10$, et le fait que dans la partie inférieure il n'y a aucun $1/10$. En effet les chiffres pris en compte pour les calculs de la dernière ligne ne sont pas pris à la même distance à partir de la droite de 2^n . Pour 2^1 , 2^2 , 2^3 le premier chiffre à gauche est le premier chiffre à droite, mais pour 2^4 , 2^5 , 2^6 le premier chiffre à gauche est le deuxième chiffre à droite, pour 2^7 , 2^8 , 2^9 le premier chiffre à gauche est le troisième chiffre à droite, etc.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre n° 1 à droite	0	0	0,25	0	0,25	0	0,25	0	0,25	0
Chiffre n° 2 à droite	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
Chiffre n° 3 à droite	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
Chiffre n° 4 à droite	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Chiffre n° 3 à gauche	0,102	0,102	0,101	0,101	0,100	0,100	0,099	0,099	0,099	0,099
Chiffre n° 2 à gauche	0,120	0,114	0,109	0,104	0,100	0,097	0,093	0,090	0,087	0,084
Chiffre n° 1 à gauche	0,000	0,301	0,176	0,125	0,097	0,079	0,067	0,056	0,051	0,046

Fréquence d'apparition des chiffres 0, 1, 2, ..., 9 selon la position considérée dans l'écriture décimale de 2^n .

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^{10}	0,0454	0,1818	0,2727	0,0454	0,1364	0,0909	0,1364	0,0000	0,0909	0,0000
2^{100}	0,0815	0,1070	0,1096	0,0930	0,1115	0,0930	0,0994	0,1006	0,1089	0,0955
$2^{1\,000}$	0,0986	0,1009	0,1020	0,0991	0,1008	0,0993	0,1007	0,0985	0,1004	0,0996
$2^{10\,000}$	0,0997	0,1000	0,1000	0,1000	0,1002	0,0999	0,1000	0,1001	0,1001	0,1000

Fréquence d'apparition des chiffres 0, 1, 2, ..., 9 quand on considère tous les chiffres présents dans les 2^n jusqu'à 2^{10} , 2^{100} , $2^{1\,000}$ et $2^{10\,000}$.