

à partir de la loi de Benford pour la base 1000 conduit à une évaluation des proportions attendues, que là encore les calculs de l'ordinateur confirment. Plus on va loin vers la droite (donc vers le haut du tableau en partant de la dernière ligne), plus les résultats théoriques donnés par la loi de Benford et les résultats pratiques indiquent que les proportions pour chaque chiffre de 0 à 9 s'approchent de 1/10. Bien qu'un peu compliquée, la situation semble maintenant claire pour les chiffres de 2^n à partir de la droite et à partir de la gauche.

PROPORTION GLOBALE POUR CHAQUE CHIFFRE

Puisqu'on ne tombe pas toujours sur la loi uniforme, se pose maintenant la question de ce qui se passe si on examine globalement la fréquence des chiffres rencontrés dans les puissances de 2 mises les unes derrière les autres :

1, 2, 4, 8, 1, 6, 3, 2, 6, 4, 1, 2, 8, 2, 5, 6, ...

L'avantage des chiffres pairs à cause du chiffre des unités de 2^n , ou l'avantage du 1 sur le 2, du 2 sur le 3 etc. à cause de la loi de Benford pour les chiffres les plus à gauche de 2^n introduisent-ils des inégalités entre les fréquences de 0, de 1, de 2, etc. dans la suite de tous les chiffres de 2^n pris les uns après les autres ? Bien sûr nous avons interrogé notre ordinateur pour le savoir avec 2^n jusqu'à $n=10000$.

Le tableau 2 de l'encadré 2 indique ce que nous avons trouvé pour $n=10$, $n=100$, $n=1000$, $n=10000$. On voit que rapidement l'écart à la loi uniforme s'estompe pour devenir insignifiant. Il semble à peu près certain qu'en poursuivant pour n tendant vers l'infini, chaque fréquence tend vers 1/10. Cette observation, à ma connaissance, n'a pas été prouvée.

TOUT L'UNIVERS ?

Toujours au sujet des chiffres de 2^n , une question se pose : est-ce que n'importe quelle séquence de chiffres, par exemple celle correspondant à votre date de naissance, peut se trouver en tête de 2^n , ou à la fin de 2^n ou quelque part dans 2^n ?

Pour la fin (partie droite de 2^n en base 10), la réponse est non. Cela se déduit du résultat que nous avons énoncé sur la périodicité des k chiffres les plus à droite et tout simplement du fait que 2^n est toujours pair.

Pour le début (partie gauche de 2^n en base 10) en revanche la réponse est oui, et c'est encore une conséquence de la loi de Benford. En effet en base $b=10^k$ la loi de Benford indique une fréquence d'apparition non nulle pour chaque chiffre. Ces chiffres écrits en base 10 sont des séquences de longueur k de chiffres décimaux. D'après la loi de Benford, la fréquence n'est jamais nulle et donc on peut affirmer que toute séquence de

3

RENCONTRES AVEC 2^n

La suite des nombres 2^n se rencontre dans une multitude de problèmes qui pourraient être pris pour la définir. Voici quelques exemples de ces rencontres que vous complétez avec la page <https://oeis.org/A000079> de l'encyclopédie des suites numériques de Neal Sloane.

• 2^n est le nombre de sous-ensembles d'un ensemble de n éléments.

• 2^n est la somme des éléments d'une ligne du triangle de Pascal.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Le k -ième élément de la ligne n , est la somme du $(k-1)$ -ième et du k -ième élément de la ligne $n-1$, et vaut $n! / ((n-k)! k!)$; c'est aussi le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments (au sommet du triangle, $n=0$ et $k=0$).

• 2^n est le nombre de « compositions de l'entier $n+1$ », c'est-à-dire le nombre de façons d'écrire $n+1$ comme une somme d'entiers non nuls en prenant en compte l'ordre des termes. Les $16 = 2^4$ compositions de 5 sont : $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 3 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 2$

$= 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 4 = 1 + 3 + 1$
 $= 1 + 2 + 2 = 1 + 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 3$
 $= 1 + 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 1 + 2$
 $= 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

On en tire les dessins représentés en bas de la page.

• 2^n est le nombre de permutations de 1, 2, ..., $n+2$ croissantes puis décroissantes. Pour $n=3$, les 8 permutations croissantes puis décroissantes de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ sont : 12345, 12354, 12453, 12543, 13452, 13542, 14532, 15432.

• 2^n est la seule suite x_n avec $x_0 = 1$ telle que la différence de deux termes consécutifs redonne la suite elle-même.

• 2^n , en commençant à $2^0 = 1$, est la suite la plus petite dont le n -ième terme n'est pas la somme de différents termes précédents. En effet avec 1, 2, ..., 2^{n-1} , on peut faire toutes les sommes de 1 à $2^n - 1$, mais pas 2^n .

• 2^n est le nombre de permutations de 1, 2, ..., $n+1$ où aucun élément n'est à plus d'une position d'écart vers la droite de sa position initiale.

Par exemple, avec $n=3$, sur les 24 permutations de 1, 2, 3, 4, seules $2^3 = 8$ conviennent (les autres sont barrées) :

1234 1243 1324 1342 1423 1432
2134 2143 2314 2341 2413 2431
3124 3142 3214 3241 3412 3421
4123 4132 4213 4231 4312 4321.

