

à partir de la loi de Benford pour la base 1000 conduit à une évaluation des proportions attendues, que là encore les calculs de l'ordinateur confirment. Plus on va loin vers la droite (donc vers le haut du tableau en partant de la dernière ligne), plus les résultats théoriques donnés par la loi de Benford et les résultats pratiques indiquent que les proportions pour chaque chiffre de 0 à 9 s'approchent de 1/10. Bien qu'un peu compliquée, la situation semble maintenant claire pour les chiffres de 2^n à partir de la droite et à partir de la gauche.

PROPORTION GLOBALE POUR CHAQUE CHIFFRE

Puisqu'on ne tombe pas toujours sur la loi uniforme, se pose maintenant la question de ce qui se passe si on examine globalement la fréquence des chiffres rencontrés dans les puissances de 2 mises les unes derrière les autres :

1, 2, 4, 8, 1, 6, 3, 2, 6, 4, 1, 2, 8, 2, 5, 6, ...

L'avantage des chiffres pairs à cause du chiffre des unités de 2^n , ou l'avantage du 1 sur le 2, du 2 sur le 3 etc. à cause de la loi de Benford pour les chiffres les plus à gauche de 2^n introduisent-ils des inégalités entre les fréquences de 0, de 1, de 2, etc. dans la suite de tous les chiffres de 2^n pris les uns après les autres? Bien sûr nous avons interrogé notre ordinateur pour le savoir avec 2^n jusqu'à $n=10000$.

Le tableau 2 de l'encadré 2 indique ce que nous avons trouvé pour $n=10$, $n=100$, $n=1000$, $n=10000$. On voit que rapidement l'écart à la loi uniforme s'estompe pour devenir insignifiant. Il semble à peu près certain qu'en poursuivant pour n tendant vers l'infini, chaque fréquence tend vers 1/10. Cette observation, à ma connaissance, n'a pas été prouvée.

TOUT L'UNIVERS?

Toujours au sujet des chiffres de 2^n , une question se pose: est-ce que n'importe quelle séquence de chiffres, par exemple celle correspondant à votre date de naissance, peut se trouver en tête de 2^n , ou à la fin de 2^n ou quelque part dans 2^n ?

Pour la fin (partie droite de 2^n en base 10), la réponse est non. Cela se déduit du résultat que nous avons énoncé sur la périodicité des k chiffres les plus à droite et tout simplement du fait que 2^n est toujours pair.

Pour le début (partie gauche de 2^n en base 10) en revanche la réponse est oui, et c'est encore une conséquence de la loi de Benford. En effet en base $b=10^k$ la loi de Benford indique une fréquence d'apparition non nulle pour chaque chiffre. Ces chiffres écrits en base 10 sont des séquences de longueur k de chiffres décimaux. D'après la loi de Benford, la fréquence n'est jamais nulle et donc on peut affirmer que toute séquence de

3

RENCONTRES AVEC 2^n

La suite des nombres 2^n se rencontre dans une multitude de problèmes qui pourraient être pris pour la définir. Voici quelques exemples de ces rencontres que vous complétez avec la page <https://oeis.org/A000079> de l'encyclopédie des suites numériques de Neal Sloane.

- 2^n est le nombre de sous-ensembles d'un ensemble de n éléments.
- 2^n est la somme des éléments d'une ligne du triangle de Pascal.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Le k -ième élément de la ligne n , est la somme du $(k-1)$ -ième et du k -ième élément de la ligne $n-1$, et vaut $n! / ((n-k)! k!)$; c'est aussi le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments (au sommet du triangle, $n=0$ et $k=0$).

• 2^n est le nombre de « compositions de l'entier $n+1$ », c'est-à-dire le nombre de façons d'écrire $n+1$ comme une somme d'entiers non nuls en prenant en compte l'ordre des termes. Les 16 = 2^4 compositions de 5 sont : $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 3 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 2$

$= 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 4 = 1 + 3 + 1$
 $= 1 + 2 + 2 = 1 + 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 3$
 $= 1 + 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 1 + 2$
 $= 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

On en tire les dessins représentés en bas de la page.

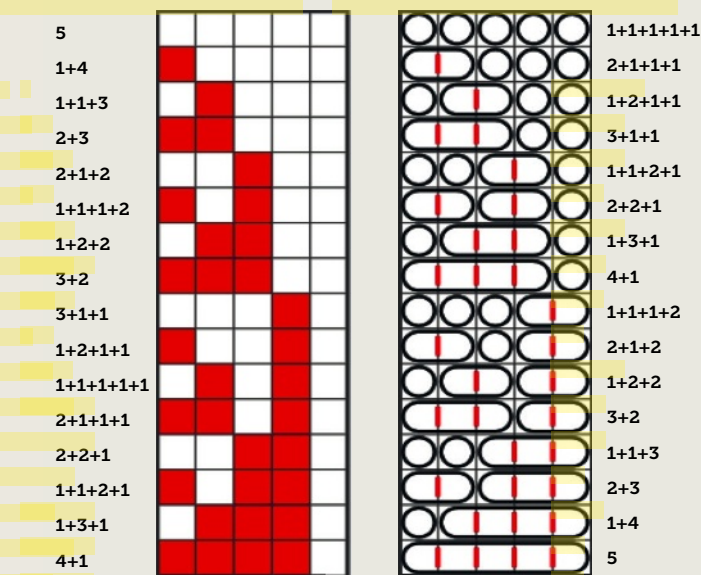
• 2^n est le nombre de permutations de 1, 2, ..., $n+2$ croissantes puis décroissantes. Pour $n=3$, les 8 permutations croissantes puis décroissantes de {1, 2, 3, 4, 5} sont : 12345, 12354, 12453, 12543, 13452, 13542, 14532, 15432.

• 2^n est la seule suite x_n avec $x_0 = 1$ telle que la différence de deux termes consécutifs redonne la suite elle-même.

• 2^n , en commençant à $2^0 = 1$, est la suite la plus petite dont le n -ième terme n'est pas la somme de différents termes précédents. En effet avec 1, 2, ..., 2^{n-1} , on peut faire toutes les sommes de 1 à $2^n - 1$, mais pas 2^n .

• 2^n est le nombre de permutations de 1, 2, ..., $n+1$ où aucun élément n'est à plus d'une position d'écart vers la droite de sa position initiale. Par exemple, avec $n=3$, sur les 24 permutations de 1, 2, 3, 4, seules $2^3 = 8$ conviennent (les autres sont barrées) :

1234 1243 1324 1342 1423 1432
 2134 2143 2314 2341 2413 2431
 3124 3142 3214 3241 3412 3421
 4123 4132 4213 4231 4312 4321.



4

VOTRE PORTRAIT AU DÉBUT DE 2ⁿ

Montrons que tous les triplets de chiffres ne commençant pas par 0 se présentent au début de l'écriture décimale d'au moins un nombre de la forme 2ⁿ. Il existe 900 de tels triplets : 100, 101, 102, ..., 999. Le raisonnement proposé se généralise sans mal, ce qui conduit à la conclusion que toute séquence finie de chiffres décimaux ne commençant pas par 0, par exemple les pixels de votre portrait en format 1 000 × 1 000 codés avec 10 niveaux de gris, se trouve comme début d'une puissance de 2 : vous êtes dans la suite 2, 4, 8, 16, ... ! (On change éventuellement le premier pixel pour qu'il ne donne pas un 0.)

Ayant codé les lettres par des chiffres, codé aussi les signes de ponctuation, les blancs, les espaces, etc., vous avez dans un début de 2ⁿ le récit de votre vie !

Considérons les puissances de 2 à partir de 2¹⁰ = 1 024. Elles ont toutes au moins quatre chiffres.

Considérons les 9 001 puissances de 2 à partir de 1 024, donc de 2¹⁰ à 2^{9 010}. Ces puissances donnent 9 001 nombres ne commençant pas par 0. Il y a nécessairement deux de ces nombres, disons 2^a et 2^b, a > b, qui commencent par les quatre mêmes chiffres, car il n'y a que 9 000 débuts possibles de quatre chiffres dont le premier chiffre n'est pas un 0. C'est une application du principe des tiroirs de Dirichlet : si vous rangez n + 1 objets dans n tiroirs, l'un des tiroirs contient deux objets ou plus.

Divisons le plus grand par le plus petit Q = 2^a/2^b = 2^{a-b}. Souvenez-vous de la façon dont on fait les divisions. J'affirme que le quotient Q commencera soit (cas 1) par un 1 suivi de trois 0 soit (cas 2) par trois 9. Si vous avez des doutes, posez la division de 2 345 498 par 234 522 et commencez le calcul ou demandez à votre ordinateur et faites de multiples contrôles.

Mon affirmation peut se démontrer rigoureusement sans trop de mal si on le souhaite.

Supposons que nous sommes dans le cas 1. Le quotient Q est une puissance de 2 et s'écrit donc Q = 2^{a-b} = 1 000s, où s est une suite finie de chiffres. Si on considère maintenant les puissances de Q : Q, Q², Q³, ... (ce sont des puissances de 2), nous affirmons que leurs trois premiers chiffres vont passer successivement par 100, 101, 102, 103, ... jusqu'à 999, chaque triplet apparaissant une ou plusieurs fois consécutivement, ce qui terminera le raisonnement.

La raison de ce défilement est que quand on multiplie un nombre quelconque A commençant par les trois chiffres a, b et c, par exemple 249, par un nombre commençant par 1 000, par exemple 1 000 458, le résultat commence par abc ou abc + 1 c'est-à-dire 249 ou 249 + 1 = 250 dans notre

exemple. En effet, multiplier A par un nombre commençant par 1 000 si on néglige la position de la virgule revient à le multiplier par 1,000xyz... c'est-à-dire à ajouter au nombre A un pourcentage de sa valeur inférieur à 1/1 000. Dans notre exemple multiplier par 1 000 458 si on néglige la position de la virgule revient à multiplier A par 1,000458, ce qui ajoute à A, 0,0458 % de sa valeur, donc moins de 1/1 000. En ajoutant moins de un millième de sa valeur à un nombre on ne change par ses trois premiers chiffres abc, ou cela fait passer de abc à abc + 1 (dans notre exemple on reste à 249 ou on passe à 250). Le cas 2 se traite de la même façon, mais la multiplication est maintenant équivalente à une soustraction de moins de un millième et donc les trois premiers chiffres vont passer de 1 000 à 999, 998, ..., 100. Ce raisonnement est dû à David Gale (voir la bibliographie).

k chiffres décimaux apparaît une infinité de fois en tête de 2ⁿ. Si par exemple on s'intéresse à 2021, la fréquence de la présence en tête de 2ⁿ est égale à :

$$\log_{10\,000}(1+1/2021) = 0,00005370943$$

soit 0,0053 %. Faible, mais pas nulle ! Une démonstration directe que toute séquence de chiffres décimaux se trouve en tête de 2ⁿ pour au moins un certain n est proposée dans l'encadré 4. Elle repose sur le principe de tiroirs.

Considérons une dernière question à propos des chiffres de 2ⁿ : faut-il attendre longtemps pour par exemple trouver tous les couples, ou tous les triplets, etc., et quelles sont les séquences les plus longues à apparaître ?

Voici les réponses pour les couples, les triplets et les quadruplets, calculées par ma machine :

- Pour voir apparaître tous les chiffres, il faut attendre 2¹⁵ = 32 768. Ce nombre contient pour la première fois un 7, qui est en quelque sorte le chiffre retardataire.

- Pour voir apparaître tous les couples de chiffres 00, 01, ..., 99, il faut attendre 2⁶⁶, qui contient pour la première fois 78, le couple retardataire.

- Pour voir apparaître tous les triplets de chiffres 000, 001, ..., 999, il faut attendre 2²¹⁵, qui contient pour la première fois 548, le triplet retardataire.

- Pour voir apparaître tous les quadruplets de chiffres 0000, 0001, ..., 9999, il faut attendre 2⁸⁰⁹, qui contient pour la première fois 9634, le quadruplet retardataire.

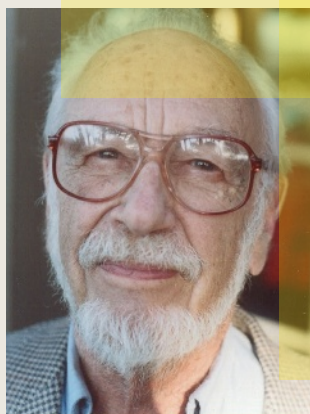
NOMBRES UNIVERS, ÉQUIRÉPARTITION, NORMALITÉ...

Pour bien comprendre ce que nous savons et ce que nous ignorons pour les chiffres de 2ⁿ, nous noterons Puis2 le nombre réel obtenu en plaçant les uns derrière les autres les chiffres de 2ⁿ après un zéro et la virgule :

$$\text{Puis2} = 0,1248163264128256...$$

Le tableau 2 de l'encadré 2, résultat d'un calcul de l'ordinateur, suggère que Puis2 est un nombre «équiréparti» : chaque chiffre apparaît avec la fréquence 1/10. Aujourd'hui, personne ne l'a démontré.

Quatre autres questions se posent naturellement concernant un nombre réel : est-il universel ? Est-il normal ? Est-il irrationnel ? Est-il transcendant ? Rappelons que par définition un nombre est «universel» (ou «nombre univers») s'il contient toute séquence finie possible de chiffres. Un nombre est normal au sens d'Émile Borel si on y rencontre chaque séquence de k chiffres avec la fréquence 1/10^k (donc fréquence 1/100 pour 34, 79, 12, etc., fréquence 1/1000 pour 123, 777, 219, etc.). Un



David Gale (1921 - 2008)