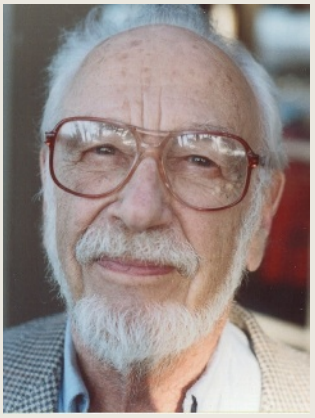
4 VOTRE PORTRAIT AU DÉBUT DE 2^n



David Gale (1921 - 2008)

Montrons que tous les triplets de chiffres ne commençant pas par 0 se présentent au début de l'écriture décimale d'au moins un nombre de la forme 2^n. Il existe 900 de tels triplets : 100, 101, 102, ..., 999. Le raisonnement proposé se généralise sans mal, ce qui conduit à la conclusion que toute séquence finie de chiffres décimaux ne commençant pas par 0, par exemple les pixels de votre portrait en format 1 000 × 1 000 codés avec 10 niveaux de gris, se trouve comme début d'une puissance de 2 : vous êtes dans la suite 2, 4, 8, 16, ... ! (On change éventuellement le premier pixel pour qu'il ne donne pas un 0.)

Ayant codé les lettres par des chiffres, codé aussi les signes de ponctuation, les blancs, les espaces, etc., vous avez dans un début de 2^n le récit de votre vie !

Considérons les puissances de 2 à partir de $2^{10} = 1\,024$. Elles ont toutes au moins quatre chiffres. Considérons les 9 001 puissances de 2 à partir de 1 024, donc de 2^{10} à $2^{9\,010}$. Ces puissances donnent 9 001 nombres ne commençant pas par 0. Il y a nécessairement deux de ces nombres, disons 2^a et 2^b, $a > b$, qui commencent par les quatre mêmes chiffres, car il n'y a que 9 000 débuts possibles de quatre chiffres dont le premier chiffre n'est pas un 0. C'est une application du principe des tiroirs de Dirichlet : si vous rangez $n + 1$ objets dans n tiroirs, l'un des tiroirs contient deux objets ou plus.

Divisons le plus grand par le plus petit $Q = 2^a/2^b = 2^{a-b}$. Souvenez-vous de la façon dont on fait les divisions. J'affirme que le quotient Q commencera soit *(cas 1)* par un 1 suivi de trois 0 soit *(cas 2)* par trois 9. Si vous avez des doutes, posez la division de 2 345 498 par 234 522 et commencez le calcul ou demandez à votre ordinateur et faites de multiples contrôles.

Mon affirmation peut se démontrer rigoureusement sans trop de mal si on le souhaite.

Supposons que nous sommes dans le *cas 1*. Le quotient Q est une puissance de 2 et s'écrit donc $Q = 2^{a-b} = 1\,000s$, où s est une suite finie de chiffres. Si on considère maintenant les puissances de Q : Q, Q^2, Q^3, ... (ce sont des puissances de 2), nous affirmons que leurs trois premiers chiffres vont passer successivement par 100, 101, 102, 103, ... jusqu'à 999, chaque triplet apparaissant une ou plusieurs fois consécutivement, ce qui terminera le raisonnement.

La raison de ce défilement est que quand on multiplie un nombre quelconque A commençant par les trois chiffres *a, b* et *c*, par exemple 249, par un nombre commençant par 1 000, par exemple 1 000 458, le résultat commence par *abc* ou *abc* + 1 c'est-à-dire 249 ou 249 + 1 = 250 dans notre exemple. En effet, multiplier A par un nombre commençant par 1 000 si on néglige la position de la virgule revient à le multiplier par 1,000*xyz*... c'est-à-dire à ajouter au nombre A un pourcentage de sa valeur inférieur à 1/1 000. Dans notre exemple multiplier par 1 000 458 si on néglige la position de la virgule revient à multiplier A par 1,000458, ce qui ajoute à A, 0,0458 % de sa valeur, donc moins de 1/1 000. En ajoutant moins de un millième de sa valeur à un nombre on ne change par ses trois premiers chiffres *abc*, ou cela fait passer de *abc* à *abc* + 1 (dans notre exemple on reste à 249 ou on passe à 250). Le *cas 2* se traite de la même façon, mais la multiplication est maintenant équivalente à une soustraction de moins de un millième et donc les trois premiers chiffres vont passer de 1 000 à 999, 998, ..., 100. Ce raisonnement est dû à David Gale *(voir la bibliographie)*.

k chiffres décimaux apparaît une infinité de fois en tête de 2^n. Si par exemple on s'intéresse à 2021, la fréquence de la présence en tête de 2^n est égale à :

$$\log_{10\,000}(1+1/2021) = 0{,}00005370943$$

soit 0,0053 %. Faible, mais pas nulle ! Une démonstration directe que toute séquence de chiffres décimaux se trouve en tête de 2^n pour au moins un certain n est proposée dans l'encadré 4. Elle repose sur le principe de tiroirs.

Considérons une dernière question à propos des chiffres de 2^n : faut-il attendre longtemps pour par exemple trouver tous les couples, ou tous les triplets, etc., et quelles sont les séquences les plus longues à apparaître ?

Voici les réponses pour les couples, les triplets et les quadruplets, calculées par ma machine :

- Pour voir apparaître tous les chiffres, il faut attendre $2^{15} = 32768$. Ce nombre contient pour la première fois un 7, qui est en quelque sorte le chiffre retardataire.

- Pour voir apparaître tous les couples de chiffres 00, 01, ..., 99, il faut attendre 2^{66}, qui contient pour la première fois 78, le couple retardataire.

- Pour voir apparaître tous les triplets de chiffres 000, 001, ..., 999, il faut attendre 2^{215}, qui contient pour la première fois 548, le triplet retardataire.

- Pour voir apparaître tous les quadruplets de chiffres 0000, 0001, ..., 9999, il faut attendre 2^{809}, qui contient pour la première fois 9634, le quadruplet retardataire.

NOMBRES UNIVERS, ÉQUIRÉPARTITION, NORMALITÉ...

Pour bien comprendre ce que nous savons et ce que nous ignorons pour les chiffres de 2^n, nous noterons *Puis*2 le nombre réel obtenu en plaçant les uns derrière les autres les chiffres de 2^n après un zéro et la virgule :

*Puis*2 = 0,1248163264128256...

Le tableau 2 de l'encadré 2, résultat d'un calcul de l'ordinateur, suggère que *Puis*2 est un nombre « équiréparti » : chaque chiffre apparaît avec la fréquence 1/10. Aujourd'hui, personne ne l'a démontré.

Quatre autres questions se posent naturellement concernant un nombre réel : est-il universel ? Est-il normal ? Est-il irrationnel ? Est-il transcendant ? Rappelons que par définition un nombre est « universel » (ou « nombre univers ») s'il contient toute séquence finie possible de chiffres. Un nombre est normal au sens d'Émile Borel si on y rencontre chaque séquence de k chiffres avec la fréquence $1/10^k$ (donc fréquence 1/100 pour 34, 79, 12, etc., fréquence 1/1000 pour 123, 777, 219, etc.). Un

nombre est rationnel si c'est le quotient de deux entiers, sinon il est irrationnel. Un nombre est «transcendant» s'il n'est solution d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers.

Dans le cas de *Puis2*, nous savons qu'il est universel puisque toute séquence de chiffres peut être en tête de 2^n. On sait qu'un nombre rationnel a nécessairement un développement décimal périodique à partir d'une certaine position, et donc n'est pas universel. Puisque *Puis2* est universel, il est nécessairement irrationnel. En revanche nous ne savons pas si *Puis2* est normal, ou s'il est transcendant, bien que cela soit un problème que les mathématiciens étudient. Pour *Puis2*, on sait donc démontrer qu'il est universel et irrationnel, on constate sans savoir le démontrer qu'il est équiréparti et normal, et on soupçonne qu'il est transcendant.

Pour bien situer ce nombre réel et sa singularité dans le monde des nombres, rappelons quelques résultats concernant d'autres nombres célèbres ou catégories de nombres.

Le cas des nombres rationnels, quotients de deux entiers, se traite aisément. Bien sûr, p/q est solution de l'équation $qX-p=0$ et donc n'est pas transcendant : aucun rationnel n'est transcendant ! Le fait que le développement décimal d'un rationnel soit périodique à partir d'une certaine position implique qu'il n'est pas universel. Un rationnel n'est jamais universel et donc n'est jamais normal.

Le problème de l'équirépartition des nombres rationnels est encore assez facile. Puisque p/q a un développement en base 10 (et dans toutes les bases) qui devient périodique à partir d'une certaine position : il suffit d'examiner la période. De deux choses l'une : ou bien la partie périodique contient tous les chiffres en égale proportion et le nombre rationnel est alors équiréparti. Ou bien ce n'est pas le cas et alors il en va de même pour le développement décimal infini de p/q et le nombre p/q n'est pas équiréparti. Donnons deux exemples.

Le nombre 1/7 a pour développement décimal 0,142857142857142857142857... La séquence 142857 se répète indéfiniment. Il n'est pas équiréparti puisqu'il manque le 0, le 3, le 6 et le 9. Et en base 10, le nombre rationnel 1 234 567 890/9 999 999 999 s'écrit 0,123456789012345678901... (la séquence 1234567890 se répète indéfiniment). Il est équiréparti.

On sait démontrer la normalité de certains nombres dont en particulier le nombre de Champernowne 0,1234567891011121314... (les entiers en base 10 les uns derrière les autres) et pour quelques autres du même genre, mais en réalité les nombres pour lesquels on sait démontrer la normalité sont assez rares.

Pour les nombres π et e (qui sont transcendants), pour $\sqrt{2}$, et plus généralement pour $\sqrt{k}$ (k entier non carré) qui sont irrationnels, mais pas transcendants, et pour bien d'autres constantes mathématiques classiques, on constate par le calcul la normalité et donc l'équirépartition et l'universalité, mais on ne sait pas les démontrer ; on ne sait pas même démontrer que chaque chiffre de 0 à 9 apparaît une infinité de fois.

Notons que les résultats énoncés pour 2^n s'adaptent pour l'essentiel pour k^n, k entier>1, et quand au lieu de la base 10 on écrit les nombres dans une base b, b entier>1. Il faut toutefois se méfier qu'il n'y ait pas une relation trop simple entre b et k, car par exemple les chiffres de 10^n en base 10 ne sont pas quelconques, de même que les chiffres de 2^n en base 4 ou 8, etc., ou encore les chiffres de 8^n en base 2. Réfléchissez-y quelques secondes. La condition qui permet de généraliser ce que nous avons vu pour 2^n en base 10 est que $\log(k)/\log(b)$ soit irrationnel.

ET LES NOMBRES PREMIERS ?

Posons-nous la question : les nombres de la forme 2^n ont-ils un rapport simple avec les nombres premiers ?

Là encore la réponse est intéressante. Bien sûr 2^n n'est pas premier, mais 2^n-1 l'est assez souvent et ce sont même les nombres de cette forme qui battent les records de calcul de grands nombres premiers, car on dispose d'algorithmes spécialement adaptés à ces nombres qui permettent de prouver rapidement qu'ils sont premiers si c'est le cas.

Ces nombres sont dénommés «nombres premiers de Mersenne». On en connaît aujourd'hui 51. Les plus petits sont : $2^2-1=3$; $2^3-1=7$; $2^5-1=31$; $2^7-1=127$. Le plus grand, qui est $2^{82589933}-1$, comporte 24 862 048 chiffres décimaux ; il commence par 148894445... et finit par ...217902591. Il a été découvert par Patrick Laroche en 2018 et c'est aujourd'hui le plus grand nombre premier connu dont on sait calculer les chiffres décimaux.

Les nombres premiers de Mersenne ont toujours un exposant qui est lui-même un nombre premier. Cela provient de l'égalité : $2^{ab}-1=(2^a-1)(1+2^a+2^{2a}+\ldots+2^{a(b-1)})$, qui montre que si n est le produit de deux entiers a et b plus grands que 1, alors 2^n-1 l'est aussi.

Notons toutefois que tous les exposants premiers ne donnent pas des nombres premiers de Mersenne. C'est vrai par exemple pour les exposants 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61 mais ce n'est pas vrai par exemple pour 11, puisque $2^{11}-1=2047=23\times89$. On conjecture qu'il y a une infinité de nombres premiers de Mersenne.

Une multiplication par 2 plusieurs fois de suite est une opération élémentaire, mais ce n'est pas le cas de ce qui en résulte ! Les problèmes que les puissances de 2 suggèrent sont innombrables, et nous en chercherons encore longtemps les solutions complètes. ■

BIBLIOGRAPHIE

J.-P. Delahaye, **Une explication pour la loi de Benford,** *Pour la Science*, n° 489, juillet 2018.

A. Berger and T. Hill, **An Introduction to Benford's Law,** Princeton University Press, 2015.

B. Rittaud, **La Peur exponentielle,** PUF, 2015.

Y. Bugeaud, **Distribution modulo one and Diophantine approximation,** Cambridge University Press, coll. « Cambridge Tracts in Mathematics », vol. 193, 2012.

D. Gale, **Tracking the Automatic Ant – and other mathematical explorations,** Springer Science & Business Media, 2012.

R. Regan, **Cycle length of powers of two mod powers of ten,** Exploring Binary, 2009. https://www.exploringbinary.com/cycle-length-of-powers-of-two-mod-powers-of-ten/

M. Fuchs, **Digital expansion of exponential sequences,** *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 2002.

V. Arnold et A. Avez, **Ergodic problems of classical mechanics,** Princeton University, 1968.