

nombre est rationnel si c'est le quotient de deux entiers, sinon il est irrationnel. Un nombre est « transcendant » s'il n'est solution d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers.

Dans le cas de *Puis2*, nous savons qu'il est universel puisque toute séquence de chiffres peut être en tête de 2^n . On sait qu'un nombre rationnel a nécessairement un développement décimal périodique à partir d'une certaine position, et donc n'est pas universel. Puisque *Puis2* est universel, il est nécessairement irrationnel. En revanche nous ne savons pas si *Puis2* est normal, ou s'il est transcendant, bien que cela soit un problème que les mathématiciens étudient. Pour *Puis2*, on sait donc démontrer qu'il est universel et irrationnel, on constate sans savoir le démontrer qu'il est équiréparti et normal, et on soupçonne qu'il est transcendant.

Pour bien situer ce nombre réel et sa singularité dans le monde des nombres, rappelons quelques résultats concernant d'autres nombres célèbres ou catégories de nombres.

Le cas des nombres rationnels, quotients de deux entiers, se traite aisément. Bien sûr, p/q est solution de l'équation $qX - p = 0$ et donc n'est pas transcendant : aucun rationnel n'est transcendant ! Le fait que le développement décimal d'un rationnel soit périodique à partir d'une certaine position implique qu'il n'est pas universel. Un rationnel n'est jamais universel et donc n'est jamais normal.

Le problème de l'équirépartition des nombres rationnels est encore assez facile. Puisque p/q a un développement en base 10 (et dans toutes les bases) qui devient périodique à partir d'une certaine position : il suffit d'examiner la période. De deux choses l'une : ou bien la partie périodique contient tous les chiffres en égale proportion et le nombre rationnel est alors équiréparti. Ou bien ce n'est pas le cas et alors il en va de même pour le développement décimal infini de p/q et le nombre p/q n'est pas équiréparti. Donnons deux exemples.

Le nombre $1/7$ a pour développement décimal $0,142857142857142857142857\dots$. La séquence 142857 se répète indéfiniment. Il n'est pas équiréparti puisqu'il manque le 0, le 3, le 6 et le 9. Et en base 10, le nombre rationnel $123456789012345678901234567890\dots$ s'écrit 0,12345678901234567890... (la séquence 1234567890 se répète indéfiniment). Il est équiréparti.

On sait démontrer la normalité de certains nombres dont en particulier le nombre de Champernowne $0,1234567891011121314\dots$ (les entiers en base 10 les uns derrière les autres) et pour quelques autres du même genre, mais en réalité les nombres pour lesquels on sait démontrer la normalité sont assez rares.

Pour les nombres π et e (qui sont transcendants), pour $\sqrt{2}$, et plus généralement pour $\sqrt[k]{k}$

(k entier non carré) qui sont irrationnels, mais pas transcendants, et pour bien d'autres constantes mathématiques classiques, on constate par le calcul la normalité et donc l'équirépartition et l'universalité, mais on ne sait pas les démontrer ; on ne sait pas même démontrer que chaque chiffre de 0 à 9 apparaît une infinité de fois.

Notons que les résultats énoncés pour 2^n s'adaptent pour l'essentiel pour k^n , k entier > 1 , et quand au lieu de la base 10 on écrit les nombres dans une base b , b entier > 1 . Il faut toutefois se méfier qu'il n'y ait pas une relation trop simple entre b et k , car par exemple les chiffres de 10^n en base 10 ne sont pas quelconques, de même que les chiffres de 2^n en base 4 ou 8, etc., ou encore les chiffres de 8^n en base 2. Réfléchissez-y quelques secondes. La condition qui permet de généraliser ce que nous avons vu pour 2^n en base 10 est que $\log(k)/\log(b)$ soit irrationnel.

ET LES NOMBRES PREMIERS ?

Posons-nous la question : les nombres de la forme 2^n ont-ils un rapport simple avec les nombres premiers ?

Là encore la réponse est intéressante. Bien sûr 2^n n'est pas premier, mais $2^n - 1$ l'est assez souvent et ce sont même les nombres de cette forme qui battent les records de calcul de grands nombres premiers, car on dispose d'algorithmes spécialement adaptés à ces nombres qui permettent de prouver rapidement qu'ils sont premiers si c'est le cas.

Ces nombres sont dénommés « nombres premiers de Mersenne ». On en connaît aujourd'hui 51. Les plus petits sont : $2^2 - 1 = 3$; $2^3 - 1 = 7$; $2^5 - 1 = 31$; $2^7 - 1 = 127$. Le plus grand, qui est $2^{82589933} - 1$, comporte 24862048 chiffres décimaux ; il commence par 148894445... et finit par ...217902591. Il a été découvert par Patrick Laroche en 2018 et c'est aujourd'hui le plus grand nombre premier connu dont on sait calculer les chiffres décimaux.

Les nombres premiers de Mersenne ont toujours un exposant qui est lui-même un nombre premier. Cela provient de l'égalité : $2^{ab} - 1 = (2^a - 1)(1 + 2^a + 2^{2a} + \dots + 2^{a(b-1)})$, qui montre que si n est le produit de deux entiers a et b plus grands que 1, alors $2^n - 1$ l'est aussi.

Notons toutefois que tous les exposants premiers ne donnent pas des nombres premiers de Mersenne. C'est vrai par exemple pour les exposants 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61 mais ce n'est pas vrai par exemple pour 11, puisque $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$. On conjecture qu'il y a une infinité de nombres premiers de Mersenne.

Une multiplication par 2 plusieurs fois de suite est une opération élémentaire, mais ce n'est pas le cas de ce qui en résulte ! Les problèmes que les puissances de 2 suggèrent sont innombrables, et nous en chercherons encore longtemps les solutions complètes. ■

BIBLIOGRAPHIE

J.-P. Delahaye, **Une explication pour la loi de Benford**, *Pour la Science*, n° 489, juillet 2018.

A. Berger and T. Hill, **An Introduction to Benford's Law**, Princeton University Press, 2015.

B. Rittaud, **La Peur exponentielle**, PUF, 2015.

Y. Bugeaud, **Distribution modulo one and Diophantine approximation**, Cambridge University Press, coll. « Cambridge Tracts in Mathematics », vol. 193, 2012.

D. Gale, **Tracking the Automatic Ant – and other mathematical explorations**, Springer Science & Business Media, 2012.

R. Regan, **Cycle length of powers of two mod powers of ten**, *Exploring Binary*, 2009. <https://www.exploringbinary.com/cycle-length-of-powers-of-two-mod-powers-of-ten/>

M. Fuchs, **Digital expansion of exponential sequences**, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 2002.

V. Arnold et A. Avez, **Ergodic problems of classical mechanics**, Princeton University, 1968.

L'AUTEUR



LOÏC MANGIN
rédacteur en chef adjoint
à Pour la Science

LA SUPPLICATION DES PUNAISES

L'artiste suisse Cornelia Hesse-Honegger, en documentant les difformités d'insectes observés près de sites nucléaires, bouscule l'idée selon laquelle seules les fortes irradiations ont de grands effets.



Dans *La Supplication*, paru en 1998, la Biélorusse Svetlana Alexievitch, Prix Nobel de littérature en 2015, donne la parole aux victimes (liquidateurs, physiciens, citoyens...) et à leurs proches de la catastrophe nucléaire de Tchernobyl survenue en avril 1986. En cherchant à reconstituer les conséquences de cet accident sur leur vie, elle met en lumière les souffrances des survivants.

L'artiste suisse Cornelia Hesse-Honegger se livre, à sa manière, au même exercice, mais en s'intéressant aux insectes. L'histoire commence à la fin des années 1960, à l'Institut zoologique de l'université de Zurich, en Suisse, où elle est illustratrice scientifique. Un de ses premiers travaux est de rendre compte des effets induits sur les drosophiles par

un composé mutagène, le méthanesulfonate d'éthyle: ces premiers «quasimodos», comme on les appelle, décideront de la suite.

Une seconde étape cruciale est son voyage à Österfärnebo, en Suède, en 1987, l'endroit d'Europe occidentale où les retombées radioactives de Tchernobyl auraient été les plus importantes. Et de fait, sur place, elle repère des fleurs anormales, des trèfles à feuilles rouges et fleurs jaunes au lieu des habituelles feuilles vertes et fleurs roses. Et puis des insectes difformes, notamment des punaises, l'espèce pour laquelle la Suisse a une prédilection (*voir la reproduction ci-dessus*), car ces arthropodes, du fait de leur régime alimentaire, sont vulnérables aux polluants absorbés par les plantes. Les anomalies qu'elle observe chez

diverses espèces sont spectaculaires! Pattes, yeux, ailes, antennes... aucun organe ne semble épargné.

Depuis, Cornelia Hesse-Honegger n'a cessé de rendre compte par sa peinture des conséquences des retombées radioactives. Après la Suède, elle a arpenté les sites de catastrophes majeures, comme ceux de Sellafield, dans l'ouest de l'Angleterre, où un grave accident a eu lieu en 1957, et de Three Mile Island, en Pennsylvanie (le cœur d'un réacteur y a partiellement fondu en 1979), les environs du site d'essais nucléaires du Nevada, et plus récemment la région de Fukushima, au Japon...

Elle a également recueilli des spécimens près des installations nucléaires fonctionnant normalement et décrites comme «sûres», en Suisse, en France



Différentes formes de perturbations sur une punaise écuyère *Lygaeus equestris*, à Tubre, en Italie, après le passage du nuage radioactif de Tchernobyl en 1986 (ailes froissées, cloques, trous, perturbation du pigment et de la chitine...).

(près de l'usine de retraitement de la Hague), en Allemagne, en Italie... Résultat? Près de 20% des insectes y présentent des difformités!

Pourtant, les autorités, dont la Commission internationale de protection radiologique (CIPR), considèrent que les dangers sont négligeables en deçà d'un seuil de radiation, un seuil déduit à partir d'une extrapolation des données sanitaires, comme celles recueillies après les bombardements de Hiroshima et de Nagasaki, c'est-à-dire des expositions intenses et rapides.

Mais tous les scientifiques ne sont pas d'accord, notamment ceux qui s'inspirent des travaux du médecin canadien Abram Petkau, qui découvrit au début des années 1970 que les membranes cellulaires étaient beaucoup plus endommagées par

un rayonnement prolongé à faible intensité que par une brève exposition à un rayonnement plus intense, à dose globale égale. En d'autres termes, une exposition chronique à de faibles doses de radioactivité serait au moins aussi dangereuse qu'une exposition brève à des doses plus élevées. Et c'est bien ce que l'artiste a repéré: les difformités des insectes à proximité des lieux d'accident ou de sites «intacts» sont du même ordre, en intensité et en nombre.

C'est ce message qu'aimerait faire passer Cornelia Hesse-Honegger, qui se revendique «artiste scientifique», à travers ses aquarelles qu'elle place dans la lignée de l'art concret, celui de son père Gottfried Honegger et de Mondrian (quand elle peint, elle se détache de l'insecte et ne voit que formes et couleurs en

tant que telles) et de l'art conceptuel (l'idée véhiculée doit primer sur l'œuvre). Quel que soit l'héritage artistique, ces œuvres sont au moins un appel à étudier plus en détail les causes et les mécanismes des perturbations qu'elles donnent à voir.

Si Svetlana Alexievitch a mis en mots un désastre dont on a caché ou au moins atténué l'ampleur – et revenu sous les feux de l'actualité à l'occasion de l'invasion de l'Ukraine par la Russie –, Cornelia Hesse-Honegger le traduit en images... ■

H. Raffles, *Créatures de Tchernobyl – L'art de Cornelia Hesse-Honegger*, Wildproject, 2022.



L'auteur a publié:
**Pollock, Turner, Van Gogh,
Vermeer et la science...**
(Belin, 2018)