

L'ESSENTIEL

- > L'histoire des machines en mathématiques est riche et ancienne.
- > L'utilité des ordinateurs et des logiciels est incontestable. Par exemple, des branches entières des mathématiques n'auraient jamais vu le jour sans les capacités de calcul des ordinateurs.
- > La réflexion sur le rôle des machines en mathématiques se limite

souvent à l'idée d'une compétition entre les humains et les ordinateurs, voire du remplacement des premiers par les seconds, ou d'une quête de performance qui motive en particulier les industriels des hautes technologies.

> C'est oublier que certains aspects de la recherche – la créativité, donner du sens aux résultats, etc. – sont des activités purement humaines.

L'AUTEUR



MICHAEL HARRIS
professeur à l'université Columbia, à New York, et à l'institut de mathématiques de Jussieu, à Paris

Les mathématiciens face au défi des machines

Des logiciels capables de vérifier des démonstrations très difficiles, des intelligences artificielles en mesure de formuler des conjectures... Des performances vertigineuses qui amènent les mathématiciens à s'interroger sur la place de l'humain dans leur discipline.

Le 5 décembre 2020, le mathématicien allemand Peter Scholze a lancé un défi de nature inédite aux chercheurs de son domaine. Avec Dustin Clausen, de l'université de Copenhague, ils venaient de développer une longue démonstration en lien avec leurs travaux sur ce qu'ils nomment «les mathématiques condensées» (voir l'encadré page 29). De l'aveu du chercheur de l'université de Bonn, leur preuve repose sur des notions extrêmement complexes que peu de mathématiciens maîtrisent. Il y a donc peu de chance qu'un spécialiste prenne le temps de vérifier ce résultat.

Or, si Peter Scholze est confiant à 99,9% de la solidité de la démonstration, un passage lui semblait assez épineux. Comme ce théorème établit les bases d'un projet ambitieux de refondation des mathématiques, il voulait avoir la certitude que son résultat était correct. Il a alors proposé à un groupe de chercheurs de vérifier son théorème en utilisant un logiciel nommé Lean, appartenant à la catégorie des «assistants de preuve». À peine six mois plus

tard, l'équipe avait formalisé la démonstration et confirmé la justesse du théorème des deux mathématiciens.

Quel est le principe des assistants de preuve? Ces logiciels, à l'image de Lean, traduisent les preuves des mathématiciens, rédigées avec des mots et des symboles formant des phrases respectant les règles de grammaire d'une langue naturelle, dans un langage purement symbolique et formel. Pour les mathématiciens (encore humains pour l'instant), les preuves formelles sont le plus souvent difficiles, voire impossibles à comprendre, à l'instar d'un code de programmation brut. Cependant, l'intérêt d'une telle formalisation est que toutes les définitions sont données avec précision et toutes les preuves sont pratiquement garanties d'être correctes. Un autre ordinateur est capable de lire ce langage formel et peut alors vérifier la validité de la déduction ligne par ligne et rejeter la moindre erreur ou ambiguïté.

L'épisode de la formalisation de la preuve de Dustin Clausen et Peter Scholze marque peut-être un tournant historique dans la



relation entre les ordinateurs et les mathématiciens. Ce n'est pas la première fois qu'un assistant de preuve est utilisé, mais c'est la première fois qu'une preuve mathématique (ou, tout au moins, une partie) n'a pas été vérifiée par des humains à l'exception de ses auteurs, mais uniquement par une machine. Cet événement est loin d'être anodin, et son impact a été amplifié par la réputation de Peter Scholze dont la qualité des travaux, à l'interface de l'arithmétique et de la géométrie, lui a valu de recevoir la médaille Fields en 2018, à seulement 30 ans.

UNE COMPÉTITION ?

Il est probable que l'influence de Peter Scholze, qui admet que la certification mécanique est un complément utile de son intuition, donnera un coup de pouce aux programmes de formalisation. Certains mathématiciens et de nombreux informaticiens se félicitent de cette évolution, qu'ils attendent depuis longtemps. Mais il existe aussi une vision selon laquelle la formalisation fondée sur l'informatique est un premier pas vers une version des mathématiques où les machines rejoignent les êtres humains, d'abord comme collègues, puis finissent par les dépasser. En 2020, lors d'une conférence, Christian Szegedy, chercheur chez Google, a évoqué des projets pour créer «une machine capable d'un raisonnement mathématique du niveau d'un humain d'ici à dix ans». Et les exemples du superordinateur Deep Blue, champion d'échecs, et plus récemment du programme AlphaGo, qui a atteint un niveau incomparable au jeu de go par autoapprentissage, sont cités comme la preuve que dans la compétition entre mathématiciens humains et mécaniques les premiers seront inévitablement perdants. Ces espoirs et craintes sont-ils réalistes ? Quelle sera alors la place des mathématiciens dans cette nouvelle distribution des rôles ?

Depuis longtemps, les machines ont une place importante en mathématiques. Le recours intensif aux systèmes mécaniques comme outil de calcul arithmétique et astronomique est bien documenté depuis l'Antiquité. Les premières machines à calculer modernes ont été inventées au XVII^e siècle sous l'impulsion de Pascal (avec la «Pascaline») et de Leibniz (avec sa «machine arithmétique», théorisée mais non fonctionnelle), considérés comme des pionniers à la fois du calcul mécanique et du développement des mathématiques modernes. Ces dispositifs ont facilité la résolution d'opérations complexes, libérant les chercheurs qui consacraient davantage de temps à leurs réflexions plutôt qu'aux fastidieuses lignes de calculs.

L'étape suivante a été le développement de la théorie du calcul par ordinateur. Celle-ci est née de façon surprenante durant une période de grande remise en question des fondements des mathématiques. Au début du XX^e siècle, David