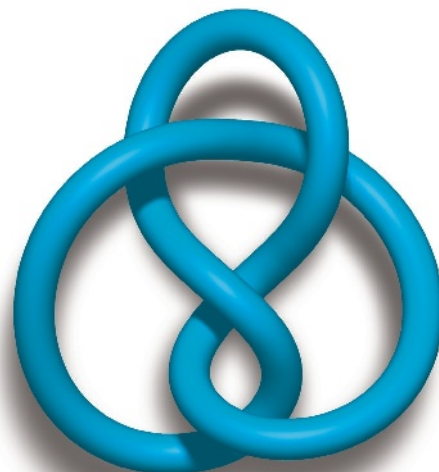


UNE IA QUI DÉCOUVRE DES CONJECTURES

Depuis quelques années, l'intelligence artificielle joue un rôle croissant en sciences. Les chercheurs utilisent de tels algorithmes pour identifier des tumeurs sur des images médicales, pour reconstruire des cascades de désintégration au sein de collisionneurs de particules, etc. En décembre 2021, la société DeepMind, filiale de Google, a présenté son nouveau programme d'apprentissage profond – un type d'intelligence artificielle qui repose sur un réseau de neurones configuré lors d'une phase d'apprentissage menée sur une vaste collection d'exemples. Ce programme est capable de trouver et de formuler des conjectures mathématiques. Spécialiste de l'intelligence artificielle, DeepMind s'est notamment fait connaître grâce à AlphaGo, son logiciel capable de battre les champions au jeu de go, ou AlphaFold, qui détermine la structure tridimensionnelle de protéines à partir de leur séquence linéaire d'acides aminés. En mathématiques, une façon de découvrir de nouvelles conjectures consiste à étudier quelques exemples, y observer des motifs, c'est-à-dire des relations entre différents paramètres. Le mathématicien généralise alors l'intuition forgée sur un nombre restreint

de cas et prouve que la conjecture est vraie. Dans cet exercice qui nécessite de mobiliser toutes les capacités créatrices du chercheur, l'ordinateur a depuis longtemps sa place. En facilitant les calculs ou la représentation, la machine fournit les indices que l'humain traduit en conjecture. Le projet de DeepMind va plus loin. Son équipe et quelques mathématiciens se sont penchés sur la théorie des nœuds. Cette branche de la topologie s'intéresse aux entrelacements d'un « bout de ficelle » fermé. Il existe une infinité de nœuds. Les mathématiciens ont défini des « invariants », des fonctions qui prennent des valeurs différentes selon les nœuds et permettent de les caractériser. Certains de ces invariants sont de nature algébrique (décrits par des polynômes) et d'autres sont de nature géométrique. En s'appuyant sur une vaste base de données de millions de nœuds (tous contenant jusqu'à seize croisements), le logiciel de DeepMind a établi une conjecture reliant pour une famille de nœuds certains invariants algébriques et certains invariants géométriques. Marc Lackenby et András Juhász, de l'université d'Oxford et membres de l'équipe, ont ensuite démontré la conjecture.



L'équipe de DeepMind a également formulé une conjecture sur les groupes de symétries en utilisant une stratégie similaire, c'est-à-dire en cherchant des motifs dans une vaste base de données. Cette méthode pourrait se généraliser à différents domaines des mathématiques (ou de la biologie, de la physique, etc.), mais certains problèmes semblent difficiles à aborder par ce biais.

SEAN BAILLY
journaliste à *Pour la Science*

et alors éditeur de la revue, a conclu : « Les rapporteurs n'ont pas été en mesure de certifier l'exactitude de la preuve et ne seront pas capables de la certifier dans le futur, parce qu'ils n'ont plus d'énergie pour se consacrer au problème. Ce n'est pas ce que j'espérais. »

Comment se sortir de cette situation où des démonstrations semblent justes mais sont impossibles à vérifier ? Quand il est devenu clair que sa preuve ne pouvait pas être validée par le système habituel d'examen par les pairs (des humains), Thomas Hales a eu recours à la vérification formelle. Après une immersion rapide dans les techniques inventées par les informaticiens, le mathématicien a annoncé en 2003 la création du projet *Flyspeck*, avec l'objectif de réécrire sa preuve dans un langage symbolique pour produire une vérification mécanique. Il avait prévu que la formalisation prendrait vingt ans de travail, mais l'accueil de son projet a été si enthousiaste que l'équipe *Flyspeck*, qui comptait alors vingt-deux membres, a atteint son objectif dès 2014.

Thomas Hales n'a pas été le seul à s'intéresser sérieusement à la formalisation. En 2005, Georges Gonthier et Benjamin Werner, d'Inria,

ont formalisé le théorème des quatre couleurs avec le système Coq. En 2007, l'équipe de Jeremy Avigad, de l'université Carnegie-Mellon, à Pittsburgh, a formalisé le théorème des nombres premiers en utilisant l'assistant de preuve Isabelle. Dans le cadre du projet *Flyspeck*, Thomas Hales a aussi formalisé le théorème de Jordan qui dit que, dans le plan, une courbe fermée simple sépare l'espace en deux parties, et dont la preuve étonnamment subtile avait résisté aux mathématiciens du XIX^e siècle pendant des décennies. Plus récemment, Thomas Hales s'est tourné vers Lean, l'assistant de preuve développé par Microsoft, qui est de plus en plus adopté sur le plan international, en particulier par le projet *Xena*, mené par le spécialiste de la théorie des nombres Kevin Buzzard, de l'Imperial College, à Londres.

La formalisation des preuves est désormais une branche reconnue des mathématiques. Pour les experts de ce domaine, l'objectif est surtout de rendre la formalisation facile d'accès pour intégrer sa pratique dans les usages courants du mathématicien.

Pour certains chercheurs, l'arrivée de la formalisation représente un tournant dans leur

approche à la recherche. «Avant, je voyais la démonstration et la formalisation comme deux choses distinctes, et maintenant je les vois comme identiques», explique la topologue Emily Riehl, de l'université Johns-Hopkins, à Baltimore. Son expérience avec les assistants de preuve a changé sa façon de travailler. En revanche, pour Peter Scholze, la mécanisation est un outil à n'utiliser que dans des circonstances exceptionnelles, à l'instar de son défi lancé en décembre 2020. «Actuellement, je ne vois pas vraiment comment [les assistants de preuve] pourraient m'aider dans mon travail créatif de mathématicien», ajoute-t-il. Face à ce rôle de plus en plus important de la machine dans l'activité du mathématicien, la créativité est-elle la limite infranchissable?

LA CRÉATIVITÉ, HORS DE PORTÉE DES MACHINES

Pour l'historienne des sciences Stephanie Dick, de l'université de Pennsylvanie, il convient d'adopter une attitude prudente vis-à-vis de la mécanisation des mathématiques. En 2014, elle a souligné que pour intégrer les objets mathématiques dans les logiciels de démonstration automatique, il a fallu les doter de propriétés computationnelles adaptées à leur manipulation par les machines. D'un point de vue philosophique, on peut alors se demander à quel point ces objets transformés sont toujours les mêmes et si, finalement, les machines répondent bien aux questions que l'on se posait initialement. Et, par ailleurs, dans quelle mesure ces objets sont-ils bien adaptés à la créativité humaine?

Les frontières des mathématiques ont toujours été nébuleuses et ont même varié au cours de l'histoire de la discipline (l'utilisation du mot «mathématique» pour désigner de façon générale l'algèbre, la géométrie, etc., ne remonte qu'à quelques siècles). Il est donc parfaitement possible qu'elles soient amenées à être redéfinies en pratique pour s'adapter aux contraintes imposées par les systèmes numériques qui seront utilisés. Les machines seraient alors, par définition, plus douées que les êtres humains en mathématiques. L'histoire de l'industrialisation, et celle des hautes technologies en particulier, nous rappelle leur efficacité à s'établir au sein de la société. Ces observations suggèrent qu'il y a de grandes chances de voir les mathématiciens forcés à s'adapter aux spécificités de l'ordinateur.

Quel serait alors l'avenir des mathématiciens refusant cette logique? Seront-ils marginalisés, obligés de travailler en passant par des réseaux informels, à l'image du samizdat, ce système clandestin qui permettait la circulation des écrits des dissidents en URSS et dans les anciens pays du bloc de l'Est? Cette dramatisation peut paraître excessive. L'informaticien

Scott Aaronson, de l'université du Texas, à Austin, a exprimé avec ironie son scepticisme quant à la numérisation rapide des mathématiques: «Il est concevable qu'un jour les ordinateurs remplaceront les êtres humains dans tous les aspects de la recherche mathématique – mais c'est aussi concevable que, au moment où ils seront capables de faire cela, ils seront en mesure de remplacer les êtres humains dans les domaines de la musique, du journalisme scientifique et tout le reste!»

Les mathématiciens qui s'interrogent sur cette évolution, voire qui la refusent dès à présent, sont parfois taxés de s'opposer au progrès technologique. Pour certains commentateurs, cela n'est pas sans rappeler le mouvement luddite des artisans anglais du XIX^e siècle qui brisaient les métiers à tisser, dans une vaine tentative de protéger leur moyen de subsistance traditionnel face à certaines idéologies économiques. Selon moi, la situation des mathématiciens est bien différente, car la valeur de leur activité ne dépend pas d'une logique de marché.

Cependant, il ne faut pas négliger un jeune acteur dans le domaine de la mécanisation des mathématiques: l'industrie des hautes technologies dans le domaine de l'informatique. Évidemment, les liens entre mathématiciens et informaticiens sont nombreux. Sans oublier que les assistants de preuve utilisés en mathématiques pures ont d'abord servi à vérifier la fiabilité de logiciels complexes. Parmi ces logiciels qui sont partout dans notre quotidien, certains peuvent engendrer des événements dramatiques s'ils présentent des défauts: le pilotage automatique des avions, la régulation du trafic routier, le contrôle des instruments médicaux, etc. L'enjeu en mathématiques pures semble bien moins urgent.

Pourtant, il y a une forte implication des entreprises – comme Microsoft, avec son

Selon le théorème de Kepler, l'empilement des sphères optimal, c'est-à-dire celui qui laisse le moins d'espace vide, est la configuration que l'on observe en général sur l'étalage du primeur. La densité est d'environ 74 %. Pour démontrer ce théorème, le mathématicien Thomas Hales s'est appuyé sur un calcul mené sur un ordinateur.

