

approche à la recherche. «Avant, je voyais la démonstration et la formalisation comme deux choses distinctes, et maintenant je les vois comme identiques», explique la topologue Emily Riehl, de l'université Johns-Hopkins, à Baltimore. Son expérience avec les assistants de preuve a changé sa façon de travailler. En revanche, pour Peter Scholze, la mécanisation est un outil à n'utiliser que dans des circonstances exceptionnelles, à l'instar de son défi lancé en décembre 2020. «Actuellement, je ne vois pas vraiment comment [les assistants de preuve] pourraient m'aider dans mon travail créatif de mathématicien», ajoute-t-il. Face à ce rôle de plus en plus important de la machine dans l'activité du mathématicien, la créativité est-elle la limite infranchissable?

LA CRÉATIVITÉ, HORS DE PORTÉE DES MACHINES

Pour l'historienne des sciences Stephanie Dick, de l'université de Pennsylvanie, il convient d'adopter une attitude prudente vis-à-vis de la mécanisation des mathématiques. En 2014, elle a souligné que pour intégrer les objets mathématiques dans les logiciels de démonstration automatique, il a fallu les doter de propriétés computationnelles adaptées à leur manipulation par les machines. D'un point de vue philosophique, on peut alors se demander à quel point ces objets transformés sont toujours les mêmes et si, finalement, les machines répondent bien aux questions que l'on se posait initialement. Et, par ailleurs, dans quelle mesure ces objets sont-ils bien adaptés à la créativité humaine?

Les frontières des mathématiques ont toujours été nébuleuses et ont même varié au cours de l'histoire de la discipline (l'utilisation du mot «mathématique» pour désigner de façon générale l'algèbre, la géométrie, etc., ne remonte qu'à quelques siècles). Il est donc parfaitement possible qu'elles soient amenées à être redéfinies en pratique pour s'adapter aux contraintes imposées par les systèmes numériques qui seront utilisés. Les machines seraient alors, par définition, plus douées que les êtres humains en mathématiques. L'histoire de l'industrialisation, et celle des hautes technologies en particulier, nous rappelle leur efficacité à s'établir au sein de la société. Ces observations suggèrent qu'il y a de grandes chances de voir les mathématiciens forcés à s'adapter aux spécificités de l'ordinateur.

Quel serait alors l'avenir des mathématiciens refusant cette logique? Seront-ils marginalisés, obligés de travailler en passant par des réseaux informels, à l'image du samizdat, ce système clandestin qui permettait la circulation des écrits des dissidents en URSS et dans les anciens pays du bloc de l'Est? Cette dramatisation peut paraître excessive. L'informaticien

Scott Aaronson, de l'université du Texas, à Austin, a exprimé avec ironie son scepticisme quant à la numérisation rapide des mathématiques: «Il est concevable qu'un jour les ordinateurs remplaceront les êtres humains dans tous les aspects de la recherche mathématique – mais c'est aussi concevable que, au moment où ils seront capables de faire cela, ils seront en mesure de remplacer les êtres humains dans les domaines de la musique, du journalisme scientifique et tout le reste!»

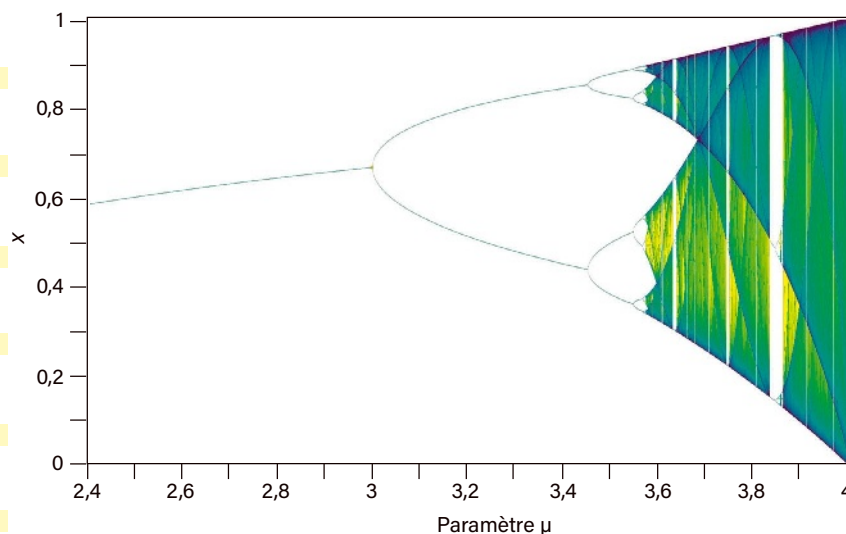
Les mathématiciens qui s'interrogent sur cette évolution, voire qui la refusent dès à présent, sont parfois taxés de s'opposer au progrès technologique. Pour certains commentateurs, cela n'est pas sans rappeler le mouvement luddite des artisans anglais du XIX^e siècle qui brisaient les métiers à tisser, dans une vaine tentative de protéger leur moyen de subsistance traditionnel face à certaines idéologies économiques. Selon moi, la situation des mathématiciens est bien différente, car la valeur de leur activité ne dépend pas d'une logique de marché.

Cependant, il ne faut pas négliger un jeune acteur dans le domaine de la mécanisation des mathématiques: l'industrie des hautes technologies dans le domaine de l'informatique. Évidemment, les liens entre mathématiciens et informaticiens sont nombreux. Sans oublier que les assistants de preuve utilisés en mathématiques pures ont d'abord servi à vérifier la fiabilité de logiciels complexes. Parmi ces logiciels qui sont partout dans notre quotidien, certains peuvent engendrer des événements dramatiques s'ils présentent des défauts: le pilotage automatique des avions, la régulation du trafic routier, le contrôle des instruments médicaux, etc. L'enjeu en mathématiques pures semble bien moins urgent.

Pourtant, il y a une forte implication des entreprises – comme Microsoft, avec son

Selon le théorème de Kepler, l'empilement des sphères optimal, c'est-à-dire celui qui laisse le moins d'espace vide, est la configuration que l'on observe en général sur l'étagère du primeur. La densité est d'environ 74 %. Pour démontrer ce théorème, le mathématicien Thomas Hales s'est appuyé sur un calcul mené sur un ordinateur.





L'étude de certains systèmes dits « chaotiques » a été facilitée grâce aux ordinateurs qui ont permis de visualiser leur comportement. Par exemple, la suite logistique, qui décrit l'évolution d'une population animale d'une année sur l'autre, est définie par $x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$. Son comportement dépend de façon très sensible de la valeur de μ . Si $0 < \mu < 1$, la population finit par tomber à zéro. Pour μ entre 1 et 3, la population se stabilise à une certaine valeur. Puis, entre 3 et environ 3,45, la population oscille entre deux valeurs suivant un cycle de deux ans. Entre 3,45 et environ 3,54, le cycle passe à quatre ans, puis à huit ans, etc. La limite du rapport entre deux intervalles consécutifs correspond à une constante universelle, une des constantes de Feigenbaum, qui vaut environ 4,6692... À partir de μ proche de 3,57, le comportement devient chaotique.

assistant de preuve Lean, ou Google, par l'entremise de sa filiale DeepMind, et son programme d'intelligence artificielle capable d'énoncer des conjectures mathématiques (voir l'encadré page 32) – à vouloir automatiser le raisonnement mathématique pour atteindre « le niveau d'un cerveau humain ». Certains industriels assument cette vision très ambitieuse. Leurs travaux actuels seraient un premier pas vers un projet plus vaste dans lequel les ordinateurs commenceraient par partager la conception même des preuves, et ensuite s'en empareraient.

En 2008, dans un article, John Harrison, chercheur au sein du groupe de raisonnement automatisé chez Amazon Web Services et précédemment chez Intel, a présenté les motivations qui poussent les industriels à investir dans le développement des assistants de preuves formelles. Il a écarté assez rapidement une première réponse possible – celle « d'une activité intellectuelle inoffensive et satisfaisante » – avant d'exposer deux « motifs plus concrets ». Son premier argument n'est pas le plus convaincant, il explique que cette démarche pourrait aider à répondre à certaines questions en philosophie des mathématiques. Le second est plus concret : les preuves formelles permettront de gagner en précision, en explicabilité et en fiabilité des démonstrations.

De mon point de vue, les arguments écartés ou retenus démontrent que les informaticiens, comme John Harrison, et les mathématiciens ont des visions antagonistes dans leur approche

de la connaissance. « L'activité intellectuelle satisfaisante » est tout en haut de ma liste des raisons qui font que la vie vaut la peine d'être vécue. Je ne suis pas le seul à penser en ces termes. Kevin Buzzard, avec son rôle central dans la vérification automatique des preuves, note ainsi : « Avec Lean, nous ne montrons aucun signe d'essoufflement, et il y a très peu de financement, juste des mathématiciens qui le font pour s'amuser. C'est l'attitude que nous devons encourager. »

Il est important de s'interroger dès maintenant sur la place que les humains doivent occuper. Il n'est pas question de se dispenser des ordinateurs qui ont enrichi le travail des mathématiciens. Mais il faut, par exemple, se demander quel serait l'intérêt pour l'humanité d'avoir des machines capables d'énoncer des conjectures et d'autres en mesure de les prouver, le tout sans intervention humaine.

JOUER LE JEU AVANT TOUT

Pour paraphraser un vieux proverbe hollandais, les mathématiques ne sont pas seulement « les billes que l'on gagne à la fin d'une partie, mais le jeu lui-même ». Les chercheurs jouent le jeu mathématique avant tout pour comprendre, et dans un second temps pour « gagner » et démontrer des conjectures. On est ici bien loin de l'esprit dans lequel les industriels développent leurs outils, dont l'objectif est par exemple d'être imbattables au jeu de go. L'histoire des mathématiques nous rassure sur ce point : la créativité des chercheurs les a toujours conduits à la découverte de « nouvelles billes » – les nombres imaginaires, les espaces vectoriels liquides de Peter Scholze, etc.

Il est assez vraisemblable que les pronostics de Christian Szegedy sur une machine capable d'un raisonnement mathématique du niveau d'un humain d'ici à 2030 ne seront pas atteints, malgré d'importants résultats (selon les critères des industriels) dans ce domaine. Mais, même si je me trompe sur ce point, je ne crois pas que les mathématiciens verront le résultat comme un « progrès ». Cette vision n'est pas tant une conception erronée des mathématiques qu'une conception erronée des êtres humains. La place des machines en mathématiques n'est pas une question de compétition.

En 2018, dans son livre *Artificial Unintelligence*, Meredith Broussard, professeuse de journalisme de données et spécialiste en intelligence artificielle, rappelait un élément clé dans la logique du développement technologique chez ceux qu'elle qualifie de « technochauvinistes » : ces derniers semblent programmés pour oublier que « les êtres humains ne sont pas maintenant, et n'ont jamais été, un obstacle à écarter. Les êtres humains sont le point essentiel. Les humains sont les êtres que toute cette technologie est censée servir ». ■

BIBLIOGRAPHIE

A. Davies et al., **Advancing mathematics by guiding human intuition with AI**, *Nature*, 2021.

J. Jumper et al., **Highly accurate protein structure prediction with AlphaFold**, *Nature*, 2021.

Peter Scholze, **Liquid tensor experiment**, blog de Kevin Buzzard (projet Xena), 2020.

J.-P. Delahaye, **Comment vérifier les longues démonstrations ?**, *Pour la Science*, n° 452, 2015.

American Mathematical Society, **A special issue on formal proof**, *Notices*, 2008.