

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
 P.86 Art & science
 P.88 Idées de physique
 P.92 Chroniques de l'évolution
 P.96 Science & gastronomie
 P.98 À picorer

BOUGER VITE... JUSQU'À L'UBIQUITÉ ?

Certaines fonctions sont si agitées qu'elles sont présentes partout à chaque instant. Elles sont parfois qualifiées de divines!

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur
 au laboratoire Cristal
 (Centre de recherche
 en informatique, signal
 et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

Si vous avez l'occasion de visiter la cathédrale de Chartres, ne manquez pas d'admirer son labyrinthe (voir l'encadré 1). La mosaïste Béatrice Jouanneau le présente comme « un pèlerinage sur place dont la finalité est d'inviter à la pénitence et à la méditation ». Dans ce labyrinthe, il ne s'agit pas de sortir d'un méandre complexe aux multiples bifurcations, mais seulement de suivre un chemin replié sur lui-même, n'offrant jamais aucun choix, et qui, si vous êtes persévérant, vous conduit au centre.

Cette impression de bouger beaucoup sans finalement se déplacer très loin est un phénomène répandu que l'on retrouve par exemple en physique avec le mouvement brownien (voir l'encadré 2). Mais aussi en mathématiques... Les mathématiciens sont d'ailleurs excessifs : ils s'emparent de cette idée simple et la poussent si loin qu'on a parfois du mal à les suivre. Cependant, ils en tirent des théorèmes absolument fascinants.

Entre les mains de ces derniers, l'idée de cette agitation presque immobile conduit aux courbes de Peano et aux bijections entre l'intervalle des nombres réels compris entre 0 et 1, noté $[0, 1]$, et le carré plein de côté unité noté $[0, 1] \times [0, 1]$. Les énoncés mathématiques auxquels on est arrivé sont les suivants :

- Il existe des bijections (tous les éléments de deux ensembles sont mis en correspondance un à un) entre l'intervalle $[0, 1]$ et le carré $[0, 1] \times [0, 1]$, mais elles ne sont jamais continues.

- Il existe des surjections continues $p(t) = (x(t), y(t))$ où $x(t)$ et $y(t)$ sont les coordonnées du point $p(t)$ à l'instant t de $[0, 1]$ vers $[0, 1] \times [0, 1]$. Surjection signifie que tous les points du carré sont atteints par $p(t)$: pour chaque point P du carré, il existe une valeur de t dans $[0, 1]$ telle que $p(t) = P$. Si on assimile t au temps, ce sont des cheminements continus passant partout. Le point $p(t)$ se déplace sans saut brusque entre l'instant 0 et l'instant 1, et passe en chaque point du carré. C'est assez étonnant et pourtant le fait que la surjection ne soit pas une bijection signifie que $p(t)$ passe plusieurs fois par certains points P .

PEANO TOUJOURS D'ACTUALITÉ

L'encadré 1 donne des exemples de courbes continues recouvrant le carré et des variantes pour le plan et l'espace.

Le mathématicien italien Giuseppe Peano a découvert, en 1890, les trajectoires continues qui passent par tous les points d'un carré, d'où leur nom de « courbes de Peano ». Aujourd'hui encore, elles font l'objet de travaux dont nous

LABYRINTHES ET COURBES DE PEANO

Le chemin le plus court n'est pas toujours le plus intéressant. Celui des écoliers allonge, souvent pour le plaisir de la conversation entre camarades, le trajet pour joindre la maison et l'école. Mieux, les labyrinthes des cathédrales (A) offrent un voyage méditatif : sans repasser deux fois au même endroit et sans jamais laisser aucun choix à ceux qui les empruntent, ils conduisent de la périphérie d'un cercle ou d'un carré à son centre. Plus étonnante, la courbe découverte en 1890 par Giuseppe Peano (B) va d'un point à un autre d'un carré en suivant un trajet continu qui passe par tous les points du carré.

La courbe est obtenue comme la limite de courbes alambiquées aux détours infiniment nombreux. Elle pousse l'art de l'agitation immobile à son comble, mais établit un résultat mathématique surprenant : il existe des fonctions continues, comme la courbe de Peano, qui envoient chaque point de l'intervalle $[0, 1]$ sur chaque point d'un carré $[0, 1] \times [0, 1]$. Elles passent partout.

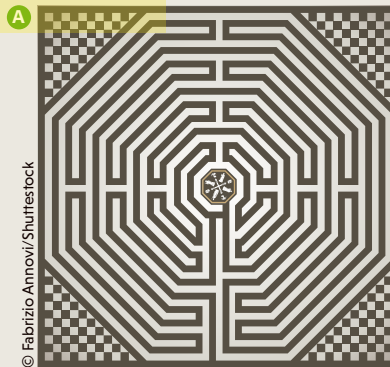
Ce qui choque l'intuition est que chaque courbe de Peano, avant le passage à la limite, a une aire nulle (aucune n'a d'épaisseur), alors que la courbe limite a une aire égale à celle du carré. C'est étonnant, mais possible, et notre intuition est à ajuster.

De nombreuses variantes de la courbe de Peano ont été imaginées. Certaines passent par tous les points de l'espace délimité par le flocon de Von Koch, dont la frontière a une longueur infinie (C). D'autres variantes de la courbe de Peano remplissent le cube (D). On étudie aussi les courbes de Peano qui vont le plus lentement possible : celle trouvée par Yuri Malykhin et Evgeny Shchepin (E) est optimale (voir le texte).



Giuseppe Peano (1858 - 1932)

Domaine public



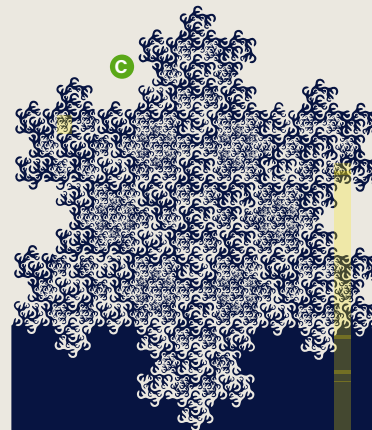
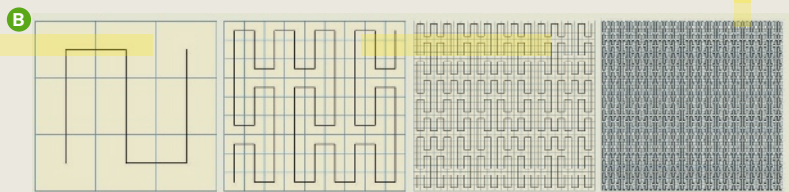
© Fabrizio Annovi/Shutterstock

Cathédrale d'Amiens



© Zlatko Guzmic/Shutterstock

Cathédrale de Chartres



© Prokofiev/Wikimedia Commons CC BY-SA 3.0

