

allons donner deux exemples. Nous allons imaginer que ces courbes sont parcourues par un point P en mouvement et examiner d'abord la rapidité du déplacement de ce point mobile de coordonnées $p(t)$ sur une courbe de Peano.

Le point $p(t)$ doit aller très vite pour passer par tous les points du carré. Puisqu'une courbe de Peano a nécessairement une longueur infinie, la vitesse du point $p(t)$ est infinie, ce qui est impossible pour un physicien, mais envisageable pour un mathématicien. En fait, non seulement la longueur totale de la courbe est infinie, mais si vous choisissez deux points du carré $p(t)$ et $p(t')$, même si t et t' sont très proches, la longueur du morceau de courbe joignant $p(t)$ à $p(t')$ est infinie: tous les points sont deux à deux à distance infinie pour celui qui suit la courbe!

Une fonction, que l'on peut assimiler à une sorte de vitesse moyenne entre deux instants t et t' (avec $t' > t$), est donnée par le quotient: $V(t, t') = d^2(p(t), p(t')) / (t' - t)$ où d désigne la distance habituelle entre deux points du plan.

Il est clair que ce nombre $V(t, t')$ est parfois supérieur à 2. Si on note C_1, C_2 , deux coins opposés du carré, et t_1 et t_2 ($t_2 > t_1$), les instants où le point $p(t)$ est en C_1 et en C_2 , on a $V(t_1, t_2) = d^2(C_1, C_2) / (t_2 - t_1) \geq d^2(C_1, C_2) / 1 = 2$. L'inégalité provient du fait que le dénominateur est inférieur à 1 puisque t_1 et t_2 sont deux nombres entre 0 et 1 (l'égalité correspond au cas où le point P part de C_1 à l'instant 0 et arrive en C_2 à l'instant 1). Le numérateur est

égal à 2 (le côté du carré est de longueur 1 et la diagonale de longueur $\sqrt{2}$). Cette sorte de vitesse entre deux points est finie, car elle néglige en quelque sorte les détours que fait $p(t)$ entre t et t' .

La question est de savoir si on peut améliorer ce 2, c'est-à-dire trouver une valeur minimale Min supérieure à 2 telle que, pour toute courbe de Peano, $V(t, t')$ dépasse Min pour certains couples (t, t') . Le problème est géométrique. Un premier résultat trouvé en 2004 dû à Evgeny Shchepin, de l'université d'État Lomonossov de Moscou, a montré que, pour toute courbe de Peano, $V(t, t')$ est nécessairement supérieur à $Min_1 = 3,5$ pour certains couples (t, t') . En 2021, Evgeny Shchepin et son collègue Eugene Mychka ont amélioré le résultat en prouvant que 3,5 pouvait être remplacé par $Min_2 = 3 + 5/8 = 3,625$, et que si on ajoute l'hypothèse que le point de départ de la courbe de Peano et le point d'arrivée de la courbe sont sur deux côtés opposés du carré, alors le minimum passe de 3,625 à 4.

Il est intéressant de constater, et c'est là le cœur des travaux d'Evgeny Shchepin et de ses collègues, que si la vitesse instantanée est nécessairement infinie, il est cependant difficile de montrer que la pseudo-vitesse $V(t, t')$ entre deux points dépasse une certaine valeur finie.

Un second résultat récent dû à Yuri Malykhin et Evgeny Shchepin complète le précédent. Il concerne les courbes de Peano les moins agitées possible, c'est-à-dire celles pour

2

FONCTIONS CONTINUES, VALEURS INTERMÉDIAIRES, FONCTIONS DE DARBOUX

Une fonction $f(x)$ est continue si on peut la tracer sans lever le crayon (A); plus précisément, si à des variations infinitésimales de la variable x correspondent des variations infinitésimales de la valeur $f(x)$. La fonction $g(x)$ est discontinue (B) car elle saute de A à B pour $x = 1$. Le mouvement brownien (C) est une description mathématique du mouvement aléatoire d'une « grosse » particule immergée dans

un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les « petites » molécules du fluide environnant. Il en résulte un mouvement très irrégulier de la grosse particule, qui a été décrit pour la première fois en 1827 par le botaniste Robert Brown. Le mouvement brownien est un exemple de fractale aléatoire, ces courbes continues et qui n'ont de tangente nulle part. La courbe de Peano est une

sorte de mouvement brownien régulier. Le théorème des valeurs intermédiaires stipule que si une fonction $f(x)$ est continue sur un intervalle de nombres réels $[a, b]$ et prend deux valeurs $f(a) = m$ et $f(b) = n$, alors elle prend toutes les valeurs intermédiaires entre m et n . Ainsi, un polynôme de degré impair, comme $f(x) = x^3 + 2$, a toujours une racine réelle (D). En effet quand $x = -2$, $f(x) = -6$ et quand $x = 0$, $f(x) = 2$.

Les fonctions $f(x)$ qui pour tout a et b , avec $a < b$, passent par toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ sont nommées « fonctions de Darboux », en l'honneur du mathématicien français Gaston Darboux. Le théorème des valeurs intermédiaires indique que si $f(x)$ est continue sur un intervalle des nombres réels, alors c'est une fonction de Darboux (E). Mais si toutes les fonctions continues sont des fonctions de Darboux, la réciproque est fautive.

